Corrigé du baccalauréat STL Biotechnologies juin 2014 Polynésie

EXERCICE 1 **5 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.
Les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 10^{-3} près.

Une entreprise fabrique en grande quantité des tubes à essais destinés à des laboratoires.
L'objectif de l'exercice est d'analyser la qualité de la production.

Partie A

La direction de l'entreprise affirme que la probabilité qu'un tube à essais ait un défaut est égale à 0,04.
On prélève au hasard 100 tubes à essais dans la production. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.
On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 100 tubes à essais, associe le nombre de tubes à essais présentant un défaut.

1. La loi de probabilité de X est une loi binomiale car il s'agit d'une répétition de n séries indépendantes et identiques caractérisées par deux issues, le tube possède un défaut ou non, de probabilité p et q telles que $p + q = 1$. Le nombre n de prélèvements est 100 et la probabilité que le tube à essais ait un défaut est 0,04.

   Nous avons donc une loi binomiale de paramètres (100 ; 0,04) par conséquent $p(X = k) = \binom{100}{k}(0,04)^k(0,96)^{100-k}$.

2. Déterminons la probabilité de l'évènement A : « Le prélèvement contient exactement 5 tubes à essais présentant un défaut ».

   $p(\text{A}) = p(X = 5) = \begin{pmatrix}100\\5\end{pmatrix}(0,04)^5(0,96)^{95} \approx 0,160.$

3. Déterminons la probabilité de l'évènement B : « Le prélèvement contient au plus 2 tubes à essais présentant un défaut ».

   $p(\text{B}) = p(X \leqslant 2) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) =$

   $p(\text{B}) = (0,96)^{100} + 100 \times (0,04)(0,96)^{99} + \begin{pmatrix}100\\2\end{pmatrix}(0,04)^2(0,96)^{98} \approx 0,232.$

Partie B

On désigne par Y la variable aléatoire qui, à un tube à essais prélevé au hasard dans la production, associe son diamètre en millimètres. Le service qualité de l'entreprise estime que la variable aléatoire Y suit la loi normale d'espérance 19,9 et d'écart type 0,25.

1. Déterminons la probabilité qu'un tube à essais ait un diamètre compris entre 19,5 mm et 20,5 mm c'est-à-dire $p(19,5 \leqslant X \leqslant 20,5)$.

   En utilisant la calculatrice, nous trouvons $p(19,5 \leqslant X \leqslant 20,5) \approx 0,937$.

2. Déterminons la probabilité qu'un tube à essais ait un diamètre supérieur ou égal à 20 mm c'est-à-dire $p(X \geqslant 20)$.

   $p(X \geqslant 20) = 1 - p(X \leqslant 20) = 1 - 0,655 = 0,345.$

Partie C

Le réglage d'une machine de production est tel que 3 % des tubes à essais fabriqués ont une épaisseur non conforme.

1. Déterminons l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des tubes à essais d'épaisseur non conforme dans un échantillon de 200 tubes à essais.

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

$$\left[0,03 - 1,96\sqrt{\frac{0,03(1-0,03)}{200}}\ ;\ 0,03 + 1,96\sqrt{\frac{0,03(1-0,03)}{200}}\right] \approx [0,006\ ;\ 0,054]$$

2. On prélève un échantillon de 200 tubes à essais. On constate que dans cet échantillon 12 tubes à essais ont une épaisseur non conforme.

   La proportion de tubes à essais non conforme est $\frac{12}{200}$ soit 0,060. Cette proportion n'appartient pas à l'intervalle de confiance au seuil de 95 %, par conséquent ce constat remet en question le réglage de la machine de production.

EXERCICE 2 **4 points**

Dans un lac de montagne, on a observé qu'une population de poissons diminuait de 6 % tous les ans en raison d'une modification écologique du lac.
On s'intéresse au nombre de poissons, n années après la première observation effectuée en 2004, où l'on comptait 3 500 poissons.
La situation peut être modélisée par une suite (u_n) de premier terme $u_0 = 3500$, u_n fournissant une estimation du nombre de poissons l'année $2004 + n$.

1. À une baisse de 6 % correspond un coefficient multiplicateur de 0,94 par conséquent pour écrire le terme suivant d'un élément de la suite nous multiplions toujours cet élément par le même nombre. La suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,94.

2. On propose l'algorithme suivant :

Variables :	U, N
Initialisation :	U prend la valeur 3 500
	N prend la valeur 0
Traitement :	Tant que $U > 2500$
	U prend la valeur $U \times 0,94$
	N prend la valeur $N + 1$
	Fin du tant que
Sortie	
Afficher N	

   La valeur de N obtenue en faisant fonctionner l'algorithme est 6. Ce résultat permet de connaître l'année où le nombre de poissons sera inférieur à 2 500.

3. En 2010, une association s'est mobilisée pour améliorer les conditions écologiques du lac. Depuis, la population de poissons a augmenté de 4 % chaque année. En 2010, l'association a constaté que le lac contenait 2 400 poissons.

   a. Déterminons le nombre de poissons présents en 2014. Nous pouvons alors considérer la suite géométrique (v_n) de raison 1,04 et de premier terme $v_0 = 2400$. v_n fournit une estimation du nombre de poissons l'année $2010 + n$. Le terme général est $v_n = 2400 \times (1,04)^n$.
   En 2014, nous avons $n = 4$, $v_4 = 2400 \times (1,04)^4 = 2808$ à une unité près.
   En 2014, il y a environ 2 808 poissons dans le lac.

b. Cette augmentation se maintenant au même rythme, pour déterminer en quelle année la population de poissons observée retrouvera la valeur de l'année 2004, résolvons $v_n = 3\,500$.

$2\,400 \times (1{,}04)^n = 3\,500 \iff 1{,}04^n = \dfrac{3500}{2400} \iff n \ln 1{,}04 = \ln\left(\dfrac{35}{24}\right) \iff n = \dfrac{\ln\left(\dfrac{35}{24}\right)}{\ln 1{,}04}$. Or $\dfrac{\ln\left(\dfrac{35}{24}\right)}{\ln 1{,}04} \approx 9{,}62$.

En 2020, la population du lac retrouvera la valeur de l'année 2004.

EXERCICE 3 **5 points**

On étudie l'évolution d'une colonie de bactéries dans une gélose nutritive non renouvelée.

Partie A

On admet que le nombre de bactéries en fonction du temps est donnée à l'instant t (exprimé en heures) par $N(t)$ où N, fonction définie sur $[0\,,\,+\infty[$, est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = -0{,}92y$.
Le nombre de bactéries à l'instant initial est égal à 525.

1. Déterminons les solutions de l'équation différentielle (E) sur $[0\,,\,+\infty[$.

   Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions y définies par $y(x) = C\mathrm{e}^{-ax} + \dfrac{b}{a}$ où C est une constante quelconque.

   $a = 0{,}92$ $b = 0$ par conséquent $y(t) = C\mathrm{e}^{-0{,}92t}$ où C est une constante quelconque.

2. Déterminons la fonction N, solution de (E) sur $[0\,,\,+\infty[$, vérifiant la condition $N(0) = 525$.

   $N(0) = C\mathrm{e}^{-0{,}92\times 0} = C = 525$ d'où $C = 525$.

   Il en résulte $N(t) = 525\mathrm{e}^{-0{,}92t}$.

Partie B

On admet que la fonction N est définie sur $[0\,,\,+\infty[$ par $N(t) = 525\mathrm{e}^{-0{,}92t}$ et on note $\mathscr{C}_N$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Déterminons la limite de la fonction N en $+\infty$.

   $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} N(t) = 0$ car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$.

   Nous pouvons alors affirmer que la courbe $\mathscr{C}_N$ est asymptote à l'axe des abscisses au voisinage de l'infini.

2. Calculons $N'(t)$ où N' désigne la fonction dérivée de N.

   $N'(t) = 525 \times (-0{,}92\mathrm{e}^{-0{,}92t}) = -483\mathrm{e}^{-0{,}92t}$ car $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$.

3. $N'(t)$ représente la vitesse instantanée de l'évolution du nombre des bactéries à l'instant t ; cette vitesse est exprimée en nombre de bactéries par heure.

   Déterminons la vitesse instantanée pour

   * $t = 0$: $N'(0) = -483\mathrm{e}^0 = -483$.
   * $t = 3$: $N'(3) = -483\mathrm{e}^{-0{,}92\times 3} \approx -30{,}57$.

4. Pour déterminer au bout de combien de temps la vitesse instantanée sera égale à la moitié de celle à l'instant $t = 0$, résolvons $N'(t) = \dfrac{1}{2} \times N'(0)$.

$$\begin{array}{rcl} -483\text{e}^{-0,92t} & = & -\dfrac{483}{2} \\ \text{e}^{-0,92t} & = & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{\text{e}^{0,92t}} & = & \dfrac{1}{2} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \text{e}^{0,92t} & = & 2 \\ \ln \text{e}^{0,92t} & = & \ln 2 \\ 0,92t & = & \ln 2 \\ t = \dfrac{\ln 2}{0,92} & \approx & 0,7534 \end{array}$$

Au bout d'environ trois quarts d'heure, la vitesse instantanée a diminué de moitié.

EXERCICE 4 **6 points**

Le but de cet exercice est de comparer les résultats, obtenus par expérience et selon un modèle théorique, d'un titrage d'une solution d'hydroxyde de sodium (NaOH) par une solution d'acide chlorhydrique (HCl).

Partie A : Expérience et approximation affine

Lors d'une expérience, on obtient les mesures suivantes :

Numéro de la mesure	1	2	3	4	5	6
Volume en ml d'acide versé : x_i	0	10	20	40	50	60
pH : y_i	11,80	11,68	11,52	11,32	11,22	11,08

1. Sur l'annexe page 6, nous avons représenté le nuage de points $M_i\left(x_i\,;\,y_i\right)$.

2. **a.** À l'aide d'une calculatrice, une équation de la droite D d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés est $y = -0,0117x + 11,7881$.(*Les coefficients sont arrondis à* 10^{-4} *près*).

b. En utilisant l'ajustement réalisé à la question précédente, déterminons le pH du mélange après versement de 35 ml d'acide chlorhydrique.
Pour ce faire, remplaçons x par 35 dans l'équation de la droite de régression.
$y = -0,0117 \times 35 + 11,7881 = 11,3786$.
Le pH, après versement de 35 ml, est d'environ 11,4.

Partie B : Modèle théorique

Pour un volume x (en ml) d'acide chlorhydrique ajouté, compris entre 0 et 150, le pH de la solution est égal à $f(x)$ où f est la fonction définie sur $[0\,,\,150]$ par : $f(x) = 3,8 - 0,01x + \dfrac{8}{1+\text{e}^{0,2x-16}}$.
La fonction f' désigne la fonction dérivée de f sur $[0\,,\,150]$.

1. **a.** Déterminons la fonction dérivée de f, pour tout x de l'intervalle $[0\,,\,150]$.
$f = u + 8 \times \dfrac{1}{v}$ où $u(x) = 3,8 - 0,01x$ et $v(x) = 1 + \text{e}^{0,2x-16}$.
Par conséquent $f'(x) = u'(x) + 8 \times \dfrac{-v'(x)}{(v(x))^2}$.
$u'(x) = -0,01 \quad v'(x) = 0,2\text{e}^{0,2x-16}$
$f'(x) = -0,01 + 8 \times \dfrac{-0,2\text{e}^{0,2x-16}}{\left(1+\text{e}^{0,2x-16}\right)^2}$.
Il en résulte : $f'(x) = -0,01 - \dfrac{1,6\text{e}^{0,2x-16}}{\left(1+\text{e}^{0,2x-16}\right)^2}$ pour tout x de l'intervalle $[0\,,\,150]$

b. Déterminons le sens de variation de la fonction f sur $[0\ ,\ 150]$. Déterminons d'abord le signe de $f'(x)$.
Pour tout x de l'intervalle $[0\ ,\ 150]$, $f'(x) < 0$ comme somme de termes négatifs.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.
Par conséquent f est strictement décroissante pour tout x de l'intervalle $[0\ ,\ 150]$

2. La courbe représentative de f est tracée sur le graphique de la partie A, annexe page 6.

Partie C : Comparaison

1. Pour 60 ml d'acide versé, comparons la valeur du pH obtenue par l'ajustement affine réalisé dans la partie A et celle obtenue par le modèle théorique de la partie B.

- la valeur du pH obtenue par l'ajustement affine : $y = -0{,}0117 \times 60 + 11{,}7881 = 11{,}0861$
- celle obtenue par le modèle théorique : $f(x) = 3{,}8 - 0{,}01 \times 60 + \dfrac{8}{1 + \mathrm{e}^{0{,}2 \times 60 - 16}} \approx 11{,}0561$.

Les valeurs sont sensiblement les mêmes, celle de la partie B légèrement inférieure à celle de la partie A.

2. Le modèle théorique étant validé, l'ajustement affine réalisé dans la partie A pour x appartenant à $[0\,;\,60]$ n'est plus pertinent sur $]60\ ,\ 150]$. À partir de 60 ml le pH décroît fortement.

Annexe (à rendre avec la copie)

EXERCICE 4