Corrigé du baccalauréat STL Biotechnologies 19 juin 2014 Métropole

EXERCICE 1 **4 points**

On s'intéresse dans cet exercice à l'évolution de la production annuelle en Indonésie de la vanille, épice utilisée dans les industries agroalimentaire et cosmétique. Le tableau ci-dessous donne la production de vanille en Indonésie :

Année	1970	1980	1990	1995	2000	2005	2010
Rang de l'année : x_i	0	10	20	25	30	35	40
Production en tonnes : y_i	250	761	1 262	1 958	1 681	2 366	2 600

Source : FAOSTAT

1. On pose $z_i = \ln\left(y_i\right)$.

   Complétons le tableau de valeurs suivant, en arrondissant les résultats à 10^{-2} près.

Rang de l'année : x_i	0	10	20	25	30	35	40
z_i	5,52	6,63	7,14	7,58	7,43	7,77	7,86

2. Le nuage de points $M_i\left(x_i\ ;\ z_i\right)$ est représenté dans le plan muni d'un repère orthogonal sur l'annexe, page 6.

3. Calculons les coordonnées à 10^{-2} près de G, point moyen du nuage. Ses coordonnées sont $\left(\overline{x}\ ;\ \overline{z}\right)$.

$$\overline{x_G} = \frac{0+10+\cdots+35+40}{7} = 22{,}86 \qquad \overline{z_G} = \frac{5{,}52+6{,}63+\cdots+7{,}86}{7} = 7{,}13$$

   G(22,86 ; 7,13) est placé sur le graphique précédent.

4. On réalise un ajustement affine de ce nuage de points $M_i\left(x_i\ ;\ z_i\right)$.

   À l'aide de la calculatrice, une équation de la droite D d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés est : $z = 0{,}0558x + 5{,}8568$ (les coefficients sont arrondis à 10^{-4} près).

   La droite D est tracée sur le graphique de l'annexe, page 6.

5. Selon ce modèle d'ajustement, l'expression de la production y en fonction du rang de l'année x est alors

   $y = \text{e}^{0{,}0558x+5{,}8568}$

6. Pour déterminer quelle serait, selon ce modèle d'ajustement, la production de vanille en Indonésie en 2015, remplaçons x par 45, rang de l'année 2015. $y = \text{e}^{0{,}0558\times45+5{,}8568} \approx 4\,306{,}15 \approx 4\,306$ à l'unité.

   La production de vanille en Indonésie en 2015 serait d'environ 4 306 tonnes.

EXERCICE 2 **5 points**

On injecte dans le sang par piqûre intraveineuse une dose de 2 cm^3 d'un antalgique.
L'organisme du patient élimine 5 % du produit présent tous les quarts d'heure.
On s'intéresse à la quantité d'antalgique, en mm^3, présent dans le sang du patient au bout de n quarts d'heure après le début de l'injection.
La situation peut être modélisée par une suite (u_n) de premier terme $u_0 = 2000$, u_n représentant une estimation de la quantité d'antalgique en mm^3 présent dans le sang du patient après n quarts d'heure.

1. Vérifions que la quantité de produit présent dans le sang du patient un quart d'heure après l'injection est égale à 1 900 mm^3. Pour ce faire, calculons u_1. À une baisse de 5 % correspond un coefficient multiplicateur de 0,95 par conséquent $u_1 = 2\,000 \times 0{,}95 = 1\,900$.

   Un quart d'heure après, il y avait 1 900 mm^3 d'antalgique dans le sang du patient.

2. **a.** $u_{n+1} = 0{,}95 \times u_n$.

   b. Pour obtenir le terme suivant d'un élément de la suite, nous multiplions cet élément toujours par le même nombre.

   Il en résulte que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,95 et de premier terme 2 000.

   c. Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est $u_n = u_0 q^n$. Ici $u_n = 2\,000(0{,}95)^n$.

3. Déterminons la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$. La raison étant positive et inférieure à 1, la suite converge vers 0. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

   La quantité d'antalgique dans le sang du patient tend à disparaître au fil du temps.

4. Le produit est jugé inefficace lorsque la quantité présente dans le sang est inférieure à 1 500 mm^3.

   Déterminons au bout de combien de quarts d'heure le produit devient inefficace. Pour ce faire, résolvons $u_n \leqslant 1500$.

   $2\,000 \times (0{,}95)^n \leqslant 1\,500 \iff 0{,}95^n \leqslant 0{,}75 \iff n \ln 0{,}95 \leqslant \ln 0{,}75$

   $\underset{\text{ln est une fonction strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*}{} \iff n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}75}{\ln 0{,}95}$ (ln 0,95 est un nombre négatif).

   $\dfrac{\ln 0{,}75}{\ln 0{,}95} \approx 5{,}608\,6$.

   Au bout de six quarts d'heure c'est-à-dire au bout d'une heure et trente minutes, le produit devient inefficace.

5. **a.** Pendant une durée égale à N quarts d'heure, on décide de réinjecter 500 mm^3 du même antalgique dès que la quantité du produit présent dans le sang devient inférieure à 1 500 mm^3.

   L'algorithme déterminant la quantité d'antalgique présent dans le sang du patient au bout de ces N quarts d'heure est complété, sur l'annexe page 6.

   b. En faisant fonctionner l'algorithme pour $N = 16$, la quantité d'antalgique présent dans le sang au bout de quatre heures est d'environ 1 586,87 mm^3.

EXERCICE 3 **6 points**

Le but de l'exercice est de suivre l'évolution d'une concentration de bactéries.
Les unités choisies sont l'heure pour le temps et le million de bactéries par millilitre pour la concentration.

Partie A

On admet que la concentration de bactéries en fonction du temps est donnée à l'instant t par $f(t)$ où f, fonction définie sur $[0, +\infty[$, est solution de l'équation différentielle (E) :

$$(E) : \quad y' + 0{,}2y = 8.$$

1. Résolvons l'équation différentielle (E) sur $[0, +\infty[$.

   Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions y définies par $y(x) = C\mathrm{e}^{-ax} + \dfrac{b}{a}$ où C est une constante quelconque.

   $a = 0{,}2$ $b = 8$ par conséquent $y(t) = C\mathrm{e}^{-0{,}2t} + 40$ où C est une constante quelconque.

2. À l'instant $t = 0$, la concentration est de 4 millions de bactéries par millilitre. Déterminons la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie $f(0) = 4$

$f(0) = C\mathrm{e}^{-0,2\times 0} + 40 = C + 40 = 4$ d'où $C = -36$.

Il en résulte $f(t) = -36\mathrm{e}^{-0,2t} + 40$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = -36\mathrm{e}^{-0,2t} + 40$ et on note (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Déterminons la limite de f en $+\infty$.

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} -36\mathrm{e}^{-0,2t} + \lim_{t\to+\infty} 40 = 0 + 40 = 40$$

La courbe représentative de f est asymptote à la droite d'équation $y = 40$ lorsque t tend vers $+\infty$.

2. **a.** On note f' la fonction dérivée de f.
Déterminons $f'(t)$ pour t appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
$f'(t) = -36 \times (-0,2)\mathrm{e}^{-0,2t} = 7,2\mathrm{e}^{-0,2t}$.

b. Étudions les variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(t) > 0$ comme produit de termes strictement positifs.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(t) > 0$, par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.

Partie C

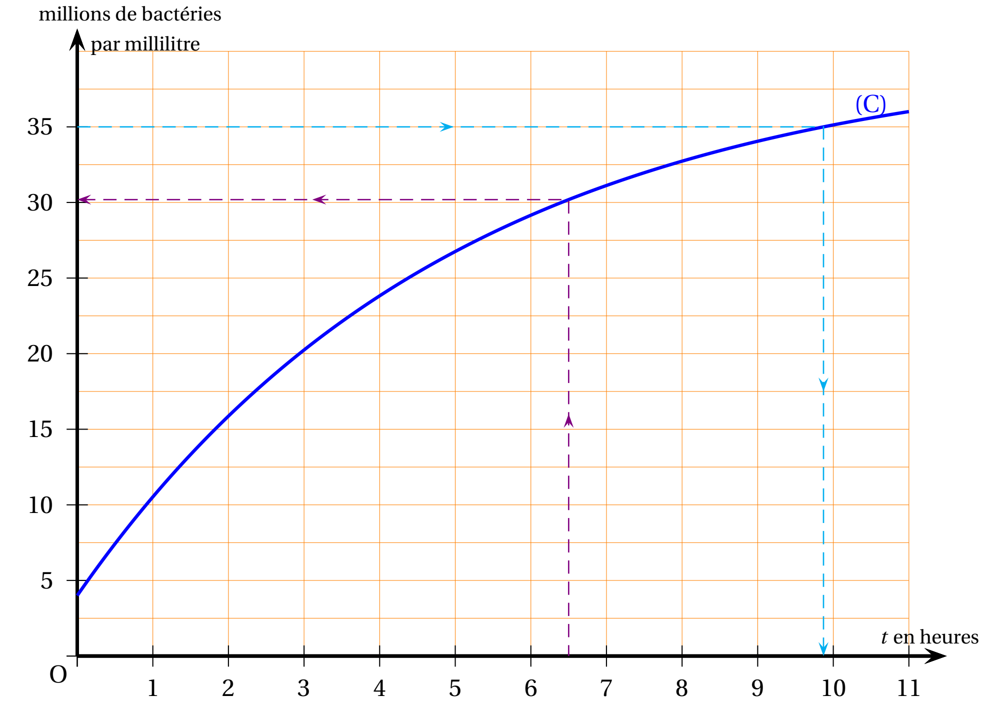
On admet que $f(t)$ représente la concentration des bactéries étudiée dans la partie A.

1. La fonction f est représentée graphiquement ci-dessous dans un repère orthogonal. On prendra 1 cm pour une heure en abscisse et 1 cm pour 5 millions de bactéries par millilitre en ordonnée.

2. En laissant apparent les constructions utiles, déterminons graphiquement :

a. la concentration des bactéries au bout de 6 h 30 ; Nous lisons l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 6,5. Avec la précision permise par le graphique, nous lisons environ 30,2.

b. le temps nécessaire pour que la concentration des bactéries soit supérieure à 35 millions de bactéries par millilitre. Nous lisons l'abscisse du point d'intersection de la courbe avec la droite d'équation $y = 35$ soit $x \approx 9,9$. Il faudrait environ neuf heures et cinquante quatre minutes pour que la concentration des bactéries soit supérieure à 35 millions par millilitre.



EXERCICE 4 **5 points**

Partie A

Un laborantin dispose d'un stock de pipettes jaugées. Une pipette est considérée conforme au cahier des charges si son volume est compris entre 24,95 et 25,05 ml.
On désigne par Y la variable aléatoire qui, à toute pipette prise au hasard dans le stock, associe son volume en ml. Le fabricant affirme que Y suit la loi normale d'espérance 25 et d'écart type 0,03.

1. À l'aide de la calculatrice, déterminons une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité pour qu'une pipette prise au hasard soit conforme au cahier des charges, selon les affirmations du fabricant.

   $p\,(24,95 \leqslant Y \leqslant 25,05) \approx 0,9044$.

2. Le laborantin prélève un échantillon de 100 pipettes et constate que seulement 83 d'entre elles sont conformes au cahier des charges.

   a. Déterminons l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de pipettes conformes dans un échantillon de taille 100 (on donnera les bornes de l'intervalle à 10^{-4} près).

   $$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

   $\left[0,9044 - 1,96\sqrt{\dfrac{0,9044(1-0,9044)}{100}}\ ;\ 0,9044 + 1,96\sqrt{\dfrac{0,9044(1-0,9044)}{100}})\right] \approx$ $[0,8468\ ;\ 0,9620]$

   b. La fréquence de pipettes conformes observée remet en question l'affirmation du fabricant, car la proportion observée 0,83 n'appartient pas à l'intervalle $[0,8468 ; 0,9620]$ au niveau de confiance de 95 %.

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse aux défaillances d'une machine qui fabrique les pipettes. Lorsqu'une révision complète de cette machine a été effectuée, la durée de fonctionnement (en jours) avant une défaillance est une variable aléatoire notée X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,005$.
On rappelle que, dans ces conditions, pour tout t positif, la probabilité que cette machine ait une défaillance avant un temps t est égale à $P(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculons $\displaystyle\int_0^t 0,005\mathrm{e}^{-0,005x}\,\mathrm{d}x$.

   En posant $u(x) = -0{,}005x \quad u'(x) = -0{,}005$ par conséquent $0,005\mathrm{e}^{-0,005x}$ est de la forme $-u'\mathrm{e}^u$ dont une primitive est $-\mathrm{e}^u$.

   Il en résulte $\displaystyle\int_0^t 0,005\mathrm{e}^{-0,005x}\,\mathrm{d}x = \Big[-\mathrm{e}^{-0,005x}\Big]_0^t = -\mathrm{e}^{-0,005t} - (-\mathrm{e}^0) = 1 - \mathrm{e}^{-0,005t}$.

2. Déterminons la probabilité $P(X \leqslant 200)$ à 10^{-4} près.

   $P(X \leqslant 200) = \displaystyle\int_0^{200} 0{,}005\mathrm{e}^{-0,005x}\,\mathrm{d}x = 1 - \mathrm{e}^{-0,005\times 200} = 1 - \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}632\,1$.

   Cette valeur correspond à la probabilité que la machine ait une défaillance avant 200 jours après une révision complète.

3. Déterminons, à 10^{-4} près, la probabilité que la machine ait une défaillance au-delà de 300 jours après une révision complète.

   Pour ce faire, calculons $p(X > 300)$.

   $p(X > 300) = 1 - p(X \leqslant 300) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-0,005\times 300}\right) = \mathrm{e}^{-1,5} = 0{,}223\,1$.

4. Un arrêt pour entretien doit intervenir systématiquement lorsque la probabilité que la machine soit défaillante est égale à $0,5$.

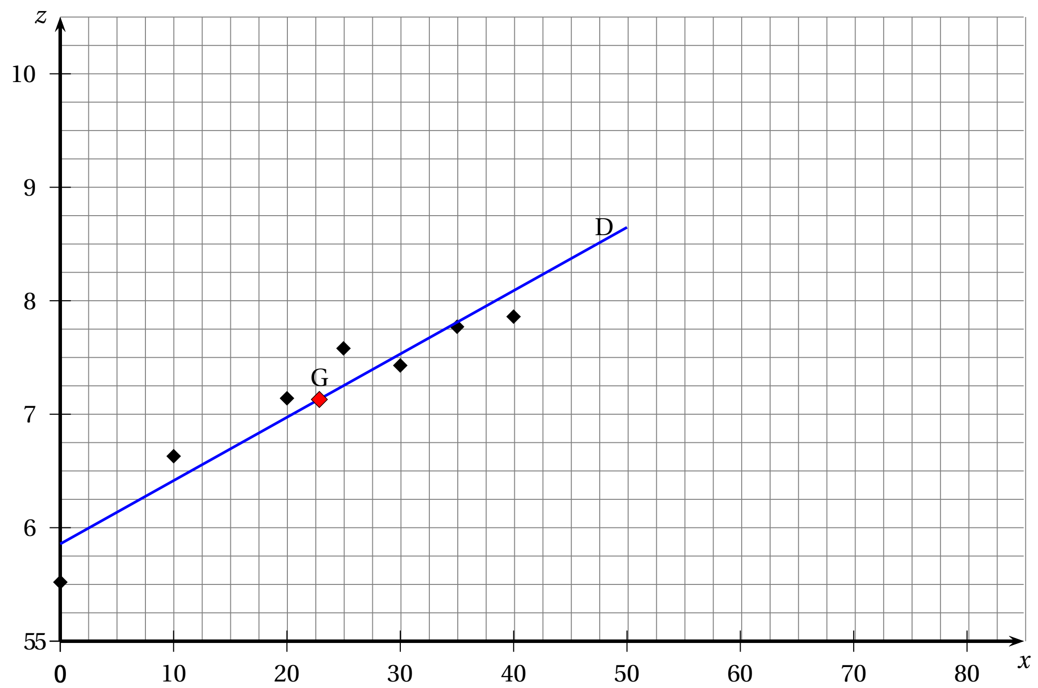
   Pour déterminer au bout de combien de jours, l'arrêt pour l'entretien de cette machine doit intervenir, résolvons $1 - \mathrm{e}^{-0,005t} = 0{,}5$

   $1 - \mathrm{e}^{-0,005t} = 0{,}5 \iff \mathrm{e}^{-0,005t} = 0{,}5 \iff \mathrm{e}^{0,005t} = 2 \iff \ln \mathrm{e}^{0,005t} = \ln 2 \iff 0{,}005t = \ln 2$
   $\iff t = \dfrac{\ln 2}{0{,}005}$. Or $\dfrac{\ln 2}{0{,}005} \approx 138{,}629$.

   Au bout de 139 jours, il faut prévoir l'arrêt pour l'entretien de la machine.

ANNEXE (à rendre avec la copie)

EXERCICE 1



EXERCICE 2

Variables :	u nombre réel, N entier
Entrée :	Saisir N
Traitement :	
	Affecter à u la valeur 2 000
	Pour i allant de 1 à N faire
	Affecter à u la valeur $u \times 0,95$
	Si u est inférieur à 1 500
	Alors affecter à u la valeur $u + 500$
	Fin si
	Fin pour
	Afficher u
Fin	