∽ Baccalauréat STL Biotechnologies ∾

Centres étrangers – 18 mai 2022

EXERCICE 1 commun à tous les candidats (4 points)

LE CARBURE DE SILICIUM SIC

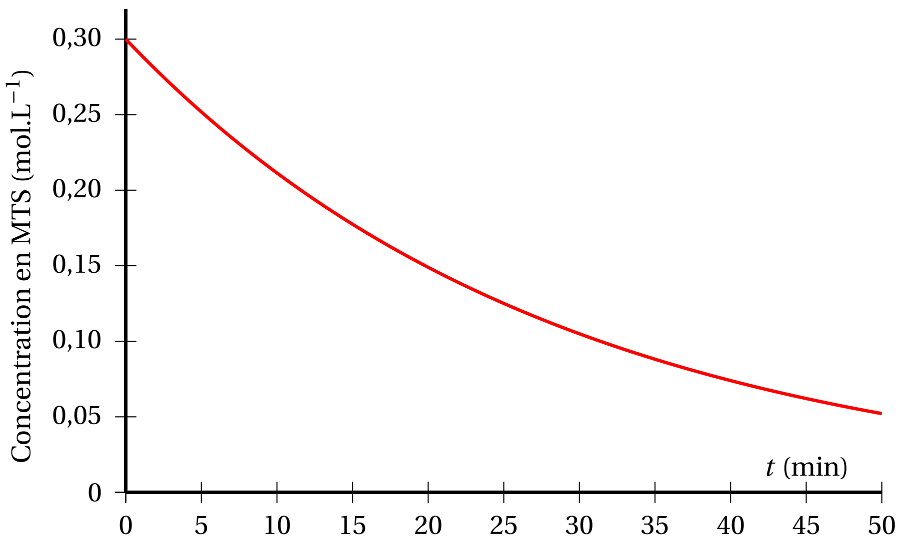
(physique et mathématiques)

Le carbure de silicium, de formule SIC, a été découvert par Jons Jacob Berzelius en 1824 lors d'une expérience pour synthétiser du diamant. Il est devenu un matériau incontournable pour la fabrication d'instruments d'optique. Par exemple, il a été utilisé pour garantir la stabilité thermomécanique du télescope spatial infrarouge Hershel, développé par l'agence spatiale européenne et lancé en 2009. En particulier la face optique des miroirs peut être revêtue de carbure de silicium par dépôt chimique en phase vapeur (ou CVD pour l'anglais « chemical vapor deposition ») afin de masquer toute porosité résiduelle et obtenir une surface polissable parfaite.
Dans ce procédé, un solide inerte servant de support est exposé à une ou plusieurs espèces chimiques en phase gazeuse qui se décomposent à sa surface pour former le matériau désiré. Parmi celles-ci, le méthyltrichlorosilane de formule CH_3SiCl_3 est très souvent choisi. Par la suite, pour des raisons de simplification, il sera noté MTS.

On considère une enceinte vide, de volume constant, thermostatée à la température $T_2 = 1\,200$ K, dans laquelle, au temps $t = 0$ min, on introduit une certaine quantité de MTS.
À cette température, la transformation permettant la formation de carbure de silicium peut être considérée comme totale.
L'équation de la réaction modélisant la transformation chimique au cours de laquelle le MTS se décompose est la suivante :

$$CH_3SiCl_3\text{(g)} \rightarrow \text{SiC}(s) + 3\text{HCl (g)}$$

On suit par un procédé adapté l'évolution de la concentration en MTS au cours du temps. On obtient ainsi le graphe suivant :



D'après concours Centrale-Supélec 2016

1. Déterminer le temps de demi-réaction $t_{1/2}$ dans ces conditions expérimentales en expliquant votre démarche.
2. On rappelle que $t_{1/2} = \dfrac{\ln 2}{k}$ avec k la constante de vitesse de la réaction.
   Déterminer la valeur de k dont on précisera l'unité.
3. Déterminer graphiquement la valeur de la vitesse de disparition du MTS à l'instant $t =$ 10 min.
4. La vitesse de disparition du MTS est de $1,0 \times 10^{-2}$ mol.L^{-1}. min^{-1} à $t = 1$ min et de $3,5 \times 10^{-3}$ mol.L^{-1}. min^{-1} à $t = 30$ (min).
   Conclure en discutant de l'évolution au cours du temps de la vitesse de disparition du MTS lorsque la concentration évolue.

On modélise la concentration en MTS exprimée en mol.L^{-1}. min^{-1} en fonction du temps t exprimé en minute, par la fonction C, définie sur l'intervalle $[0\,;50]$ par :

$$C(t) = 0,30 \cdot \mathrm{e}^{-0,035t}$$

5. On note C' la fonction dérivée de la fonction C sur l'intervalle $[0\,;50]$. Déterminons l'expression de $C'(t)$ pour t appartenant à $[0\,;50]$.

$$C'(t) = 0,30 \times (-0,035\,\mathrm{e}^{-0,035t} = -0,0105\,\mathrm{e}^{-0,035t}$$

6. On rappelle que la vitesse de disparition de MTS est égale à l'opposé de la fonction dérivée C'. On note C'' la fonction dérivée de C'.
   On admet que $C''(t) = 3,675 \cdot 10^{-4}\mathrm{e}^{-0,035t}$ pour t appartenant à $[0\,;50]$.
   Étudions le sens de variation de la vitesse de réaction au cours du temps.
   Pour tout $t \in [0\ ;\ 50]$, $C''(t) > 0$. Par conséquent C' est strictement croissante sur cet intervalle et la fonction opposée est strictement décroissante sur $[0\,;50]$
   Comparer le sens de variation avec le résultat de la question 4.
7. On considère que la transformation chimique de décomposition de MTS peut être stoppée lorsqu'il ne reste que 10 % de la concentration initiale de MTS.
   Déterminons l'instant t à partir duquel la transformation chimique peut être stoppée. On donnera la valeur exacte, puis la valeur arrondie à la minute près.
   10 % de la concentration initiale de MTS vaut 0,03. (10 % de 0,30)
   Résolvons donc $C(t) = 0,03$

$$\begin{aligned}
0,30 \cdot \mathrm{e}^{-0,035t} &= 0,03\\
\mathrm{e}^{-0,035t} &= \frac{0,03}{0,30}\\
\mathrm{e}^{-0,035t} &= 0,1\\
-0,035t &= \ln 0,1\\
t &= \frac{\ln 0,1}{-0,035}\\
t &= \frac{\ln 10}{0,035}\\
t &= \frac{1\,000 \ln 10}{35}\\
t &\approx 65,788
\end{aligned}$$

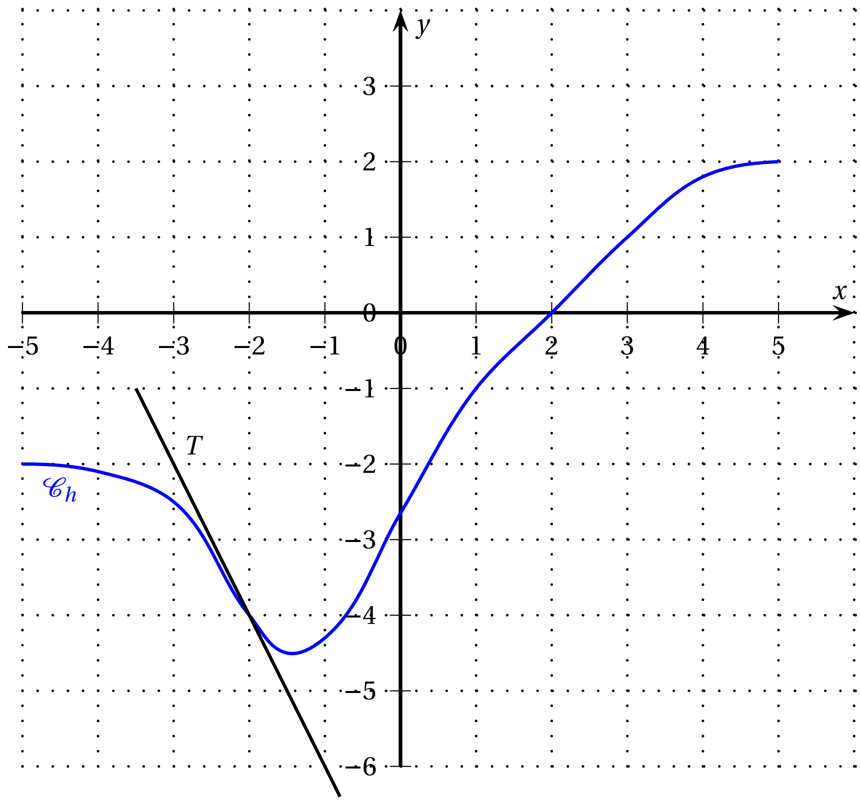
La transformation chimique peut être stoppée à partir d'environ 66 min.

EXERCICE 3 (4 points)

(mathématiques)

Le candidat doit traiter quatre questions parmi les six numérotées de 1 à 6 que comporte l'exercice. Les questions sont indépendantes.
Le candidat choisit les quatre questions auxquelles il répond et indique clairement leur numéro sur sa copie en début d'exercice. Seules ces questions sont évaluées.
Chacune d'elles est notée sur un point. Traiter une question supplémentaire ne rapporte aucun point.

Pour les questions 1 et 2 uniquement :
On donne, ci-dessous $\mathscr{C}_h$, la courbe représentative d'une fonction h, définie et dérivable sur l'intervalle $[-5 ; 5]$.
On a tracé une partie de la droite, notée T, tangente à la courbe $\mathscr{C}_h$ au point d'abscisse -2.



Question 1 :

Les points A$(-3 ; -2)$ et B$(-2 ; -4)$ appartiennent à la droite T.

1. Déterminons l'équation réduite de la droite T.
   L'équation réduite d'une droite est de la forme $y = mx + p$ où
   $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, $\quad m = \dfrac{-4-(-2)}{-2-(-3)} = -2$
   Écrivons qu'elle passe par A : $-2 = -2(-3) + p$ d'où $p = -8$.
   L'équation réduite de (AB) est $y = -2x - 8$.
2. Il en résulte que la valeur exacte de $h'(-2)$ est -2, puisque le nombre dérivé de la fonction en a est le coefficient directeur de la tangente à la courbe en ce point.
3. Déterminons les coordonnées des points d'intersection de la droite T avec chacun des axes du repère.

— Avec l'axe des abscisses, $y = 0$ soit $-2x-8 = 0$ d'où $x = -4$. Le point a pour coordonnées $(-4~;~0)$.

— Avec l'axe des ordonnées, $x = 0$ soit $y = -8$. Le point a pour coordonnées $(0~;~-8)$.

Question 2 : exploitation du graphique

Soit H une primitive de h sur l'intervalle $[-5~;~5]$.
À l'aide du graphique, donnons le sens de variation de la fonction H sur l'intervalle $[-5~;~5]$.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur I.
Sur $]-5~;~2[$, $h(x) < 0$ par conséquent H est strictement décroissante sur cet intervalle.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors la fonction f est strictement croissante sur I.
Sur $]2~;~5]$, $h(x) > 0$ par conséquent H est strictement croissante sur cet intervalle.

Question 3 :

On considère l'équation différentielle (E) suivante :

$$y' = -0{,}04y + 0{,}8 \qquad (E)$$

Déterminons f la solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0~;+\infty[$, qui vérifie la condition initiale $f(0) = 100$.
Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions y définies par $y(x) = C\,\mathrm{e}^{-ax} + \dfrac{b}{a}$ où C est une constante quelconque.
$a = 0{,}04$ $b = 0{,}8$ par conséquent sur $[0~;~+\infty[$ $f(x) = C\,\mathrm{e}^{-0{,}04x} + \dfrac{0{,}8}{0{,}04}$
c'est-à-dire $f(x) = C\,\mathrm{e}^{-0{,}04x} + 20$ où C est une constante quelconque.
Déterminons C.

$$f(0) = C\,\mathrm{e}^{-0{,}04\times 0} + 20 = C + 20 = 100 \quad \text{d'où} \quad C = 80$$

La solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0~;+\infty[$, qui vérifie la condition initiale $f(0) = 100$ est la fonction f définie par

$$f(x) = 80\,\mathrm{e}^{-0{,}04x} + 20.$$

Question 4 :

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Montrons que, pour tout x réel, $f'(x) = -x\,\mathrm{e}^{-x}$.

   $f = uv \quad f' = u'v + uv' \qquad f'(x) = 1\times\,\mathrm{e}^{-x} + (x+1)\times(-1\times\,\mathrm{e}^{-x}) = (1-x-1)\,\mathrm{e}^{-x} = -x\,\mathrm{e}^{-x}$

2. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$. Le signe de $f'(x)$ est celui de $-x$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$, $\quad f'(x) > 0$, par conséquent f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\quad f'(x) < 0$, par conséquent f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour les questions 5 et 6 uniquement :
On note L le niveau sonore en dB et I l'intensité sonore en $\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-2}$ d'un son. On désigne par Log la fonction logarithme décimal. On a la relation suivante :

$$L = 10\,\mathrm{Log}\left(\frac{I}{I_0}\right), \quad \text{où } I_0 = 10^{-12}\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-2}.$$

Question 5 :

1. Déterminons le niveau sonore L d'un son d'intensité sonore $I = 10^{-5} W \cdot \text{m}^{-2}$.
Remplaçons I par sa valeur :

$$L = 10\text{Log}\left(\frac{10^{-5}}{10^{-12}}\right) = 10\,\text{Log}\,10^7 = 10 \times 7 = 70$$

Le niveau sonore est de 70 dB

2. Une sirène d'alarme a un niveau sonore de 130 dB. Déterminons l'intensité sonore.
Résolvons l'équation en I

$$\begin{aligned}
10\,\text{Log}\,\frac{I}{10^{-12}} &= 130 \\
\text{Log}\,\frac{I}{10^{-12}} &= 13 \\
\frac{I}{10^{-12}} &= 10^{13} \\
I &= 10^{13} \times 10^{-12} \\
I &= 10
\end{aligned}$$

Son intensité sonore I est $10\,\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$.

Question 6 :
On souhaite faire baisser le niveau sonore de 10 dB.
On note $L' = L - 10$ et on note I' l'intensité sonore correspondant à L'.
C'est-à-dire :

$$L' = 10\text{Log}\left(\frac{I'}{I_0}\right).$$

Exprimons I' en fonction de I.

$$\begin{aligned}
L' &= L - 10 \\
10\,\text{Log}\left(\frac{I'}{I_0}\right) &= 10\,\text{Log}\left(\frac{I}{I_0}\right) - 10 \\
\text{Log}\left(\frac{I'}{I_0}\right) &= \text{Log}\left(\frac{I}{I_0}\right) - 1 \\
\text{Log}\left(\frac{I'}{I_0}\right) - \text{Log}\left(\frac{I}{I_0}\right) &= -1 \\
\text{Log}\,\frac{\left(\frac{I'}{I_0}\right)}{\left(\frac{I}{I_0}\right)} &= -1 \\
\frac{I'}{I} &= 10^{-1} \\
I' &= I \times 10^{-1} = \frac{I}{10}.
\end{aligned}$$