Baccalauréat STL Biotechnologies

Métropole – La Réunion – 7 juin 2021

Exercice 3 commun à tous les candidats **4 points**

Vous traiterez 4 questions au choix parmi les 6 questions proposées.
Pour les questions 1 et 2, on considère la fonction suivante :
Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = (2x-1)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Question 1 : Calculons $g(0)$.

$$g(0) = (2\times 0-1)\,\mathrm{e}^{0} = -1$$

Question 2 :
On admet que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.
a. Montrons que, pour tout réel x appartenant à $[0\,;\,+\infty[$, $g'(x) = (-2x+3)\,\mathrm{e}^{-x}$.

$$g'x) = 2\times\,\mathrm{e}^{-x} + (2x-1)\times\left(-1\,\mathrm{e}^{-x}\right) = (2-2x+1)\,\mathrm{e}^{-x} = (-2x+3)\,\mathrm{e}^{-x}$$

b. Justifions que $g(x) < 2\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$ pour $x > \dfrac{3}{2}$.
$g'(x) < 0$ si et seulement si $x > \dfrac{3}{2}$. Par conséquent g est strictement décroissante sur $\left]\dfrac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$
or $g\left(\frac{3}{2}\right) = 2\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$. Nous avons donc sur $\left]\dfrac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$, $\quad g(x) < 2\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$

Question 3 :
Sachant que $\cos\left(\dfrac{9\pi}{5}\right) = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$, exprimer $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ en fonction de $\sqrt{5}$.

$$\frac{9\pi}{5} = \frac{10\pi-\pi}{5} = 2\pi - \frac{\pi}{5}$$

$$\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{10\pi-\pi}{5}\right) = \cos\left(2\pi-\frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Question 4 :
On considère l'intégrale I suivante : $I = \displaystyle\int_0^2 (2x-1)\,\mathrm{d}x$.
Montrons que $I = 2$.

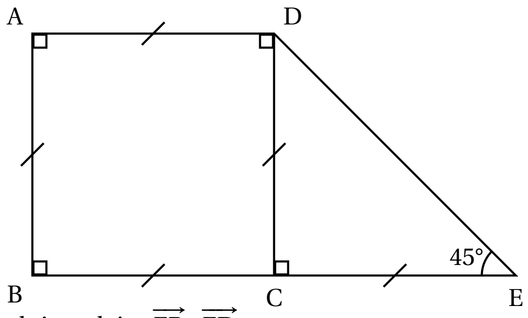
$$I = \int_0^2 (2x-1)\,\mathrm{d}x = \left[x^2-x\right]_0^2 = 4-2 = 2.$$

Question 5 :
Simplifions le nombre suivant en détaillant les calculs :

$$A = 5\ln\left(\mathrm{e}^{3}\right) - 4\ln\left[\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right].$$

$\ln \mathrm{e}^{3} = 3 \qquad \ln \mathrm{e}^{-2} = -2$, Nous avons alors $5\times 3 - 4\times(-2) = 15+8 = 23$.

Question 6 :
ABCD est un carré de côté 3 cm et DCE est un triangle rectangle et isocèle en C.



Donnons la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{ED}$.
Calculons, d'abord ED.
$ED^2 = EC^2 + CD^2 = 2EC^2$, par conséquent

$$ED = EC\sqrt{2} \text{ et } ED\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = CE \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{ED} = \left\|\overrightarrow{EB}\right\| \left\|\overrightarrow{ED}\right\| \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 9.$$

Nous pouvions aussi dire que C est le projeté orthogonal de D sur (EB).
Nous aurions pu écrire directement

$$\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{ED} = EB \times EC = 3 \times 3 = 9$$