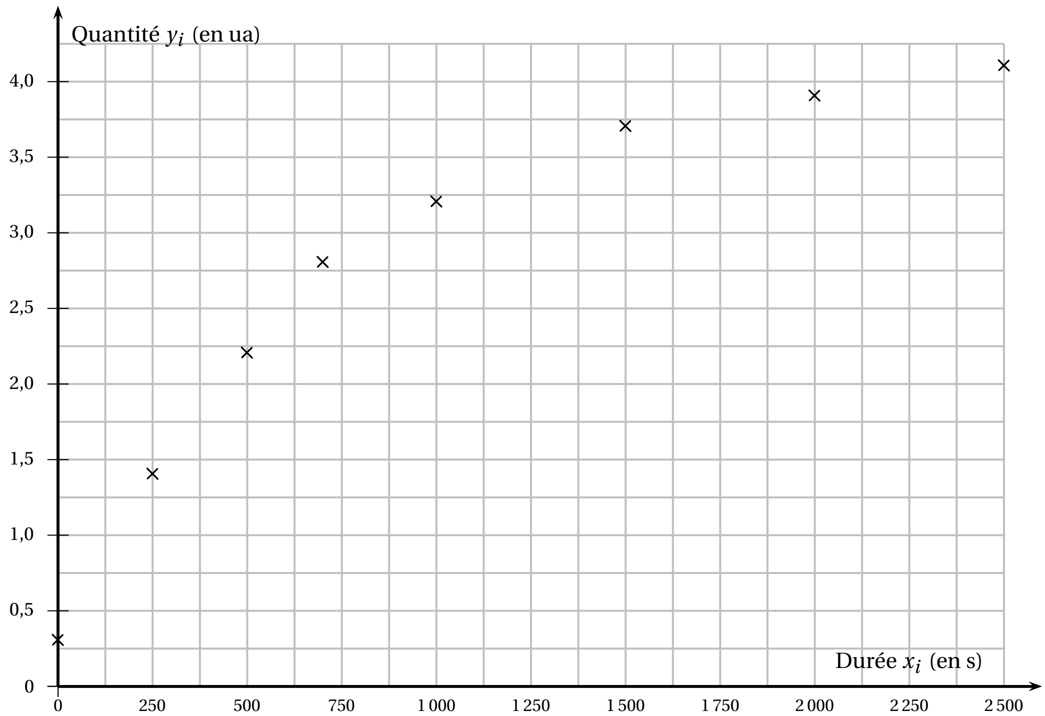
Corrigé du baccalauréat STL spécialité biotechnologies
Métropole – 18 juin 2019

EXERCICE 1 **(5 points)**

Dans une solution tampon (solution dont le pH varie peu ou ne varie pas lors de l'ajout d'un acide ou d'une base, ou lors d'une dilution), on introduit des levures (*saccharomyces cerevisiae*) en suspension. On ajoute ensuite une solution de glucose à 5 millimoles par litre (mmol.L^{-1}), et on suit la fermentation de glucose par les levures en relevant la quantité d'éthanol obtenue au cours du temps.
Le tableau ci-dessous donne la quantité y_i (exprimée en unité arbitraire, ua) d'éthanol dans la solution, en fonction de x_i qui représente la durée écoulée, en seconde, depuis l'ajout de glucose.
À chaque valeur de y_i, on associe $z_i = \dfrac{5,2}{5,2 - y_i}$.

Durée x_i (en s)	0	250	500	700	1 000	1 500	2 000	2 500
Quantité y_i (en ua)	0,3	1,4	2,2	2,8	3,2	3,7	3,9	4,1
$z_i = \dfrac{5,2}{5,2 - y_i}$	1,061 2	1,368 4	1,733 3		2,600 0	3,466 7	4,000 0	4,727 2

On donne ci-dessous le nuage de points M$_i$, de coordonnées $(x_i\ ;\ y_i)$, dans un repère orthogonal du plan.



Affirmation 1 : Un ajustement affine du nuage de points M$_i$ $(x_i\ ;\ y_i)$ est adapté.

> Les points ne sont pas alignés donc un ajustement affine n'est pas adapté.
>
> **Affirmation 1 fausse**

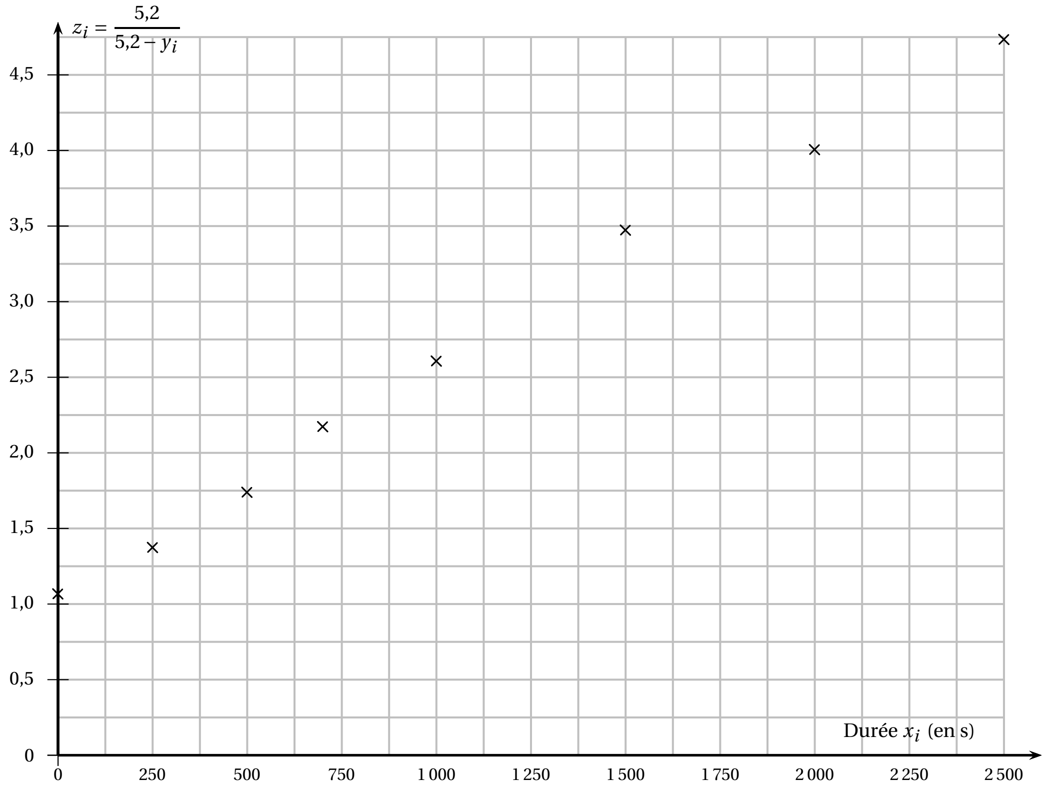
Affirmation 2 : Au dix-millième près, la valeur manquante de z_i est 2,166 7.

> Pour $y_i = 2,8$ on a $z_i = \dfrac{5,2}{5,2 - 2,8} \approx 2,166\,7$.
>
> **Affirmation 2 vraie**

Affirmation 3 : Lorsque la durée écoulée depuis l'introduction du glucose passe de 1 000 à 2 000 secondes, la quantité y d'éthanol augmente de plus de 25 %.

> Lorsque la durée écoulée depuis l'introduction du glucose passe de 1 000 à 2 000 secondes, la quantité y d'éthanol passe de 3,2 à 3,9 donc augmente de $\dfrac{3{,}9-3{,}2}{3{,}2}\times 100 = 21{,}875\,\%$.
>
> **Affirmation 3 fausse**

On donne ci-dessous le nuage de points N_i, de coordonnées $(x_i\,; z_i)$, dans un repère orthogonal du plan.



À l'aide d'une calculatrice, on a obtenu, pour ce second nuage de points, l'ajustement affine suivant : $z = 0{,}0015x + 1{,}0627$.

Affirmation 4 : Grâce à l'ajustement affine donné, on peut estimer que $y = 5{,}2 - \dfrac{5{,}2}{0{,}0015x + 1{,}0627}$.

> On a $z = 0{,}0015x + 1{,}0627$ et $z = \dfrac{5{,}2}{5{,}2-y}$ donc $0{,}0015x + 1{,}0627 = \dfrac{5{,}2}{5{,}2-y} \iff 5{,}2 - y = \dfrac{5{,}2}{0{,}0015x + 1{,}0627} \iff 5{,}2 - \dfrac{5{,}2}{0{,}0015x + 1{,}0627} = y$
>
> **Affirmation 4 vraie**

Affirmation 5 : En utilisant le modèle d'ajustement de l'affirmation précédente, on peut estimer que la quantité d'éthanol présente quarante minutes après l'introduction du glucose est supérieure à 4 ua.

> 40 minutes correspondent à 2 400 secondes, donc on cherche y pour $x = 2400$:
> $5{,}2 - \dfrac{5{,}2}{0{,}0015\times 2400 + 1{,}0627} \approx 4{,}085 > 4$
>
> **Affirmation 5 vraie**

EXERCICE 2 **6 points**

Julie a l'intention de planter des bambous dans son jardin. Comme ils sont réputés envahissants, elle souhaite d'abord avoir une estimation de leur taille et de la surface qu'ils occuperont dans les années à venir.
Un botaniste indique que l'espèce choisie par Julie a une hauteur qui augmente de 35 % par an dans les conditions de son jardin. Il précise que ces bambous ont pour taille maximale 6 mètres.
Pour tout entier naturel n, on note h_n la hauteur des bambous, exprimée en mètre, n années après les avoir plantés.
Dans les jardineries, ces plantes sont vendues alors que leur hauteur est de 0,6 mètre, que l'on considérera comme la hauteur initiale.

1. **a.** D'après le texte $h_0 = 0{,}6$, et $h_1 = h_0\left(1+\dfrac{35}{100}\right) = 0{,}81$..

b. Augmenter de 35 % c'est multiplier par 1,35 donc $h_{n+1} = 1{,}35 \times h_n$.

c. On en déduit que la suite (h_n) est géométrique de raison $q = 1{,}35$ et de premier terme $h_0 = 0{,}6$.
On a alors pour tout n, $h_n = h_0 \times q^n = 0{,}6 \times 1{,}35^n$.

d. Afin de ne pas gêner ses voisins, Julie envisage de ne pas laisser sa plantation dépasser 4 mètres de hauteur.
À la calculatrice, on trouve $h_6 = 0{,}6 \times 1{,}35^6 \approx 3{,}6$ et $h_7 = 0{,}6 \times 1{,}35^7 \approx 4{,}9$. Donc Julie peut laisser pousser ses bambous 6 ans sans les tailler.

e. Des trois algorithmes ci-dessous, c'est l'algorithme 2 pour lequel, à la fin de son exécution, la variable N contient le résultat de la question précédente.

```
N ← 0
U ← 0,6
Tant que N < 4
    N ← N +1
    U ← 1,35× U
Fin Tant que
```

Algorithme 1

```
N ← 0
U ← 0,6
Tant que U < 4
    N ← N+1
    U ← 1,35× U
Fin Tant que
```

Algorithme 2

```
U ←0,6
Pour N allant de 1 à 4
    U ← 1,35× U
Fin Pour
```

Algorithme 3

2. Julie n'a pas prévu d'installer de barrière anti-rhizomes, les bambous pourront donc se répandre sur le terrain. Selon le botaniste, la surface colonisée augmente de 2 % par mois. Julie plante ses bambous sur une surface initiale de 1 m^2.
Augmenter de 2 %, c'est multiplier par 1,02 ; il faut donc chercher le nombre de mois n tel que $1{,}02^n \geqslant 2$:

$1{,}02^n \geqslant 2 \iff \ln\left(1{,}02^n\right) \geqslant \ln(2) \iff n \times \ln(1{,}02) \geqslant \ln(2) \iff n \geqslant \dfrac{\ln(2)}{\ln(1{,}02)}$

$\dfrac{\ln(2)}{\ln(1{,}02)} \approx 35{,}003$ donc c'est au bout de 36 mois que les bambous se seront répandus sur une surface de plus de 2 m^2.

3. Julie se rend dans la jardinerie la plus proche de son domicile. Elle souhaite acheter des pots de bambous provenant d'une entreprise d'horticulture située à moins de cent kilomètres de cette jardinerie. On appelle C la condition :

« les pots ont été préparés à moins de 100 km de la jardinerie ».

Dans la jardinerie où Julie se trouve, une étude portant sur un échantillon de 200 pots montre que 135 d'entre eux ont été fournis par un horticulteur respectant la condition C.

a. La fréquence f, dans cet échantillon, des pots qui respectent la condition C est
$f = \dfrac{135}{200} = 0{,}675$.

b. On donne une estimation de p, la proportion des pots satisfaisant la condition C, par un intervalle de confiance à 95 % :

$$\begin{aligned} I &= \left[f - 1{,}96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}}\ ,\ f + 1{,}96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}} \right] \\ &= \left[0{,}675 - 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}675\,(1-0{,}675)}{200}}\ ;\ 0{,}675 + 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}675\,(1-0{,}675)}{200}} \right] \approx [0{,}61\ ;\ 0{,}74] \end{aligned}$$

c. Julie recommandera cette jardinerie s'il est possible qu'au moins trois quarts des pots de bambous achetés vérifient la condition C.

Trois quarts correspondent à 0,75 et cette valeur n'appartient pas à l'intervalle de confiance I. Donc Julie ne recommandera pas cette jardinerie.

EXERCICE 3 **6 points**

PARTIE A

On considère l'équation différentielle (E) $y' + 0{,}01y = 1$ où y est une fonction dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

1. L'équation différentielle $y' + ay = b$ a pour solutions les fonctions f définies par $f(t) = k\mathrm{e}^{-at} + \dfrac{b}{a}$ où k est un réel quelconque, donc l'équation différentielle $y' + 0{,}01y = 1$ a pour solutions les fonctions f définies par $f(t) = k\mathrm{e}^{-0{,}01t} + \dfrac{1}{0{,}01}$, c'est-à-dire $f(t) = k\mathrm{e}^{-0{,}01t} + 100$ où k est un réel quelconque.
2. On détermine la fonction g solution de (E) vérifiant la condition $g(0) = 20$:
   $g(0) = 20 \iff k\mathrm{e}^{-0{,}01\times 0} + 100 = 20 \iff k + 100 = 20 \iff k = -80$
   La fonction g cherchée est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(t) = -80\mathrm{e}^{-0{,}01t} + 100$.

PARTIE B

L'objectif des questions suivantes est l'étude de la température de l'eau dans un chauffe-eau. La mise en marche se fait de manière automatique chaque soir à 22h30 (heures creuses). On note $g(t)$ la température de l'eau dans le chauffe-eau, exprimée en degré Celsius, t minutes après le déclenchement du mode « heures creuses ».
On considère que la fonction g est définie pour tout nombre réel de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par : $g(t) = -80\mathrm{e}^{-0{,}01t} + 100$.

1. À partir de 22h30, l'heure de 23h correspond à 30 minutes de chauffe et l'heure de minuit correspond à 90 minutes de chauffe.
   La différence de température de l'eau du chauffe-eau entre 23h et minuit est donc de $g(90) - g(30) \approx 26{,}7°$ C.
2. **a.** $g'(t) = -80 \times (-0{,}01)\,\mathrm{e}^{-0{,}01t} = 0{,}8\,\mathrm{e}^{-0{,}01t}$
   b. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{x} > 0$ donc pour tout t de $[0\ ;\ +\infty[$, $\mathrm{e}^{-0{,}01t} > 0$ ce qui implique que $g'(t) > 0$.
   La fonction g est donc strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Dans la suite de l'exercice, on admet que :

— la valeur moyenne de g sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ est donnée par : $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

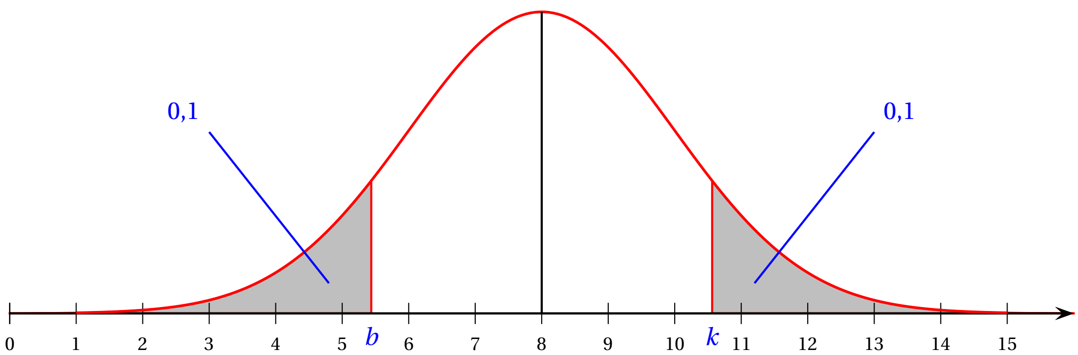
— la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $G(t) = 8000\mathrm{e}^{-0{,}01t} + 100t$ est une primitive de la fonction g sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

3. La température moyenne de l'eau dans le chauffe-eau entre 23h et minuit est
   $\dfrac{1}{90-30}\displaystyle\int_{30}^{90} g(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{60}\left[G(90) - G(30)\right] \approx 55{,}4°$ C
4. En réalité, le chauffe-eau est doté d'un système de régulation de la température afin que celle-ci ne dépasse par 60 °C.
   L'heure à laquelle l'eau du chauffe-eau atteint cette température de 60 °C est la valeur de t pour laquelle $g(t) = 60$:

$$g(t) = 60 \iff -80\,\mathrm{e}^{-0{,}01t} + 100 = 60 \iff 40 = 80\,\mathrm{e}^{-0{,}01t} \iff 0{,}5 = \mathrm{e}^{-0{,}01t}$$
$$\iff \ln(0{,}5) = -0{,}01t \iff -\frac{\ln(0{,}5}{0{,}01} = t \text{ soit environ 69 minutes.}$$

EXERCICE 4 **3 points**

Dans une grande chaîne de magasins, la direction décide de recenser la durée d'attente en caisse de ses clients. On considère la variable aléatoire X qui, à un client pris au hasard dans l'ensemble des magasins, fait correspondre son temps d'attente exprimé en minute. À partir de ces données, on considère que la variable aléatoire X suit une loi normale d'écart type 2.
On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction de densité correspondant à la loi suivie par la variable aléatoire X, obtenue à l'aide d'un logiciel.



1. La direction estime que l'attente est trop longue pour un client si elle est supérieure ou égale à dix minutes.
   D'après la courbe, on peut dire que l'espérance de la loi suivie par X est $\mu = 8$.
   La probabilité que, pour un client pris au hasard, la durée d'attente soit supérieure à cette période jugée trop longue est $P(X \geqslant 10) \approx 0{,}159$.
2. On veut déterminer une valeur approchée au centième du réel k vérifiant $P(X > k) = 0{,}1$.
   La calculatrice donne $b \approx 5{,}437$ pour b tel que $P(X \leqslant b) = 0{,}1$.
   Mais pour tout a, $P(X \leqslant \mu - a) = P(X \geqslant \mu + a)$.
   Donc $P(X \leqslant b) = P(X \leqslant \mu - (\mu - b)) = P(X \geqslant \mu + (\mu - b)) = P(X \geqslant 2\mu - b)$
   Comme $P(X \leqslant 5{,}437) \approx 0{,}1$, on en déduit que $P(X \geqslant 2 \times 8 - 5{,}437) \approx 0{,}1$ ou encore $P(X \geqslant 10{,}563) \approx 0{,}1$.
   La valeur approchée au centième du nombre k tel que $P(X > k) = 0{,}1$ est 10,56.
   10,56 minutes correspondent à environ $10'34''$; donc la probabilité d'attendre plus de $10'34''$ est de 0,1.