**Durée : 3 heures**

# Correction du baccalauréat STMG Antilles–Guyane 18 juin 2015

**EXERCICE 1** **4 points**

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).*
*Le candidat recopiera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.*
*Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte.*
*Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou l'absence de réponse n'enlève aucun point.*

**1.** Le prix d'un article soldé est de 41,40 €. L'étiquette indique « -40 % ». Le prix de l'article avant les soldes était de :

**a.** $\boxed{69\text{ €}}$ **b.** ~~81,40 €~~ **c.** ~~58 €~~

**2.** Une entreprise produit un grand nombre d'ampoules. La proportion d'ampoules défectueuses dans la production est de 0,03. On prélève successivement et de façon indépendante quatre ampoules dans la production.
Une valeur approchée au millième de la probabilité que, parmi ces quatre ampoules, exactement deux soient défectueuses est :

**a.** ~~0,250~~ **b.** ~~0,060~~ **c.** $\boxed{0{,}005}$

**3.** On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ par :

$$f(x) = \frac{x^2+5x}{3x+4}.$$

La dérivée de la fonction $f$ est donnée par :

**a.** $\cancel{f'(x) = \frac{2x+5}{3}}$ **b.** $\cancel{f'(x) = \frac{9x^2+38x+20}{(3x+4)^2}}$ **c.** $\boxed{f'(x) = \frac{3x^2+8x+20}{(3x+4)^2}}$.

**4.** On considère la fonction $g$ définie pour tout nombre réel $x$ par :

$$g(x) = 2x^3+4x+2.$$

Une équation de la tangente à la courbe représentative de $g$ au point d'abscisse 2 est :

**a.** $\cancel{y = 26x+2}$ **b.** $\boxed{y = 28x-30}$ **c.** $\cancel{y = 28x+26}$

**EXERCICE 2** **5 points**

Le tableau ci-dessous donne le nombre d'habitants en millions de la population française en fonction de l'année.

| Année | Rang $x_i$ | Nombre $y_i$ d'habitants en millions |
|---|---|---|
| 2000 | 0 | 60,5 |
| 2001 | 1 | 60,9 |
| 2002 | 2 | 61,4 |
| 2003 | 3 | 61,8 |
| 2004 | 4 | 62,3 |
| 2005 | 5 | 62,7 |
| 2006 | 6 | 63,2 |
| 2007 | 7 | 63,6 |
| 2008 | 8 | 63,9 |
| 2009 | 9 | 64,3 |
| 2010 | 10 | 64,6 |

*Source : INSEE*

**Partie A : premier modèle**

1. À l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement affine de $y$ en $x$, obtenue par la méthode des moindres carrés est : $y = 0,42x + 60,56$ (les coefficients étant arrondis au centième).
2. On décide d'ajuster ce nuage de points par la droite $D$ d'équation $y = 0,4x + 60,6$. Sur la base de ce modèle, donnons une estimation du nombre d'habitants en France en 2050.
   En 2050 le rang est 50. En remplaçant $x$ par 50 dans l'équation de la droite, nous obtenons $y = 0,4 \times 50 + 60,6 = 80,6$.
   Sur la base de ce modèle, le nombre d'habitants en France en 2050 serait d'environ 80,6 millions.

**Partie B : deuxième modèle**

1. Calculons le taux d'évolution global du nombre d'habitants de la population française, exprimé en pourcentage et arrondi à 0,001 %, entre les années 2000 et 2010.
   Le taux d'évolution $T$ est défini par $T = \dfrac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}}$ $\quad T = \dfrac{64,6 - 60,5}{60,5} \approx 0,067769$.
   Le taux d'évolution global du nombre d'habitants de la population française entre les années 2000 et 2010 est d'environ 6,777 %.
2. En appelant $t_m$ le taux moyen, le coefficient multiplicateur global est aussi $(1+t_m)^{10}$ puisque le nombre d'habitants a subi 10 évolutions durant cette période.
   $(1 + t_m)^{10} = 1,06777$ par conséquent $t_m = 1,06777^{\frac{1}{10}} - 1 \approx 0,006579$.
   Le taux d'évolution annuel moyen sur cette même période est d'environ 0,658 %.
3. Dans la suite de l'exercice, on suppose qu'à partir de 2010, le nombre d'habitants augmente de 0,66 % par an.
   Cette évolution conduit à estimer le nombre d'habitants, exprimé en millions, au cours de l'année $2010 + n$
   ($n$ désignant un entier naturel), à partir de la valeur du $n$-ième terme d'une suite géométrique $(u_n)$.
   **a.** Le premier terme de la suite $(u_n)$ est le nombre d'habitants, exprimé en millions, en 2010 c'est-à-dire $u_0 = 64,6$.
   La raison de la suite est 1,0066 puisque, à une augmentation au taux $t$ correspond un coefficient multiplicateur de $1 + t$.
   **b.** Le terme général d'une suite géométrique de premier terme $u_0$ et de raison $q$ est
   $u_n = u_0 \times (q)^n$.
   $u_n = 64,6 \times (1,0066)^n$.
   **c.** Montrons que, selon ce modèle, il y aura environ 84 millions d'habitants en France en 2050.
   Pour ce faire, calculons $u_{40}$. $u_{40} = 64,6 \times (1,0066)^{40} \approx 84,044$.
   Selon ce modèle, il y aurait environ 84 millions d'habitants en France en 2050.

**Partie C**

D'après certains experts, la population mondiale devrait atteindre neuf milliards en 2050.
Justifions, par un calcul, la phrase suivante :
« En 2050, il y aura moins d'une personne sur cent de la population mondiale qui vivra en France. »
Calculons la proportion $p$ de personnes vivant en France par rapport à la population mondiale.
$p = \dfrac{84 \times 10^6}{9 \times 10^9} \approx 0{,}0093$.
Ce résultat est inférieur à 0,01. Par conséquent, nous pouvons affirmer que la phrase est correcte.
*remarque* Nous aurions pu calculer le centième de la population mondiale c'est-à-dire 90 millions. Or selon les différents modèles ce nombre n'est pas atteint. Par conséquent, en 2050, il y aura moins d'une personne sur cent de la population mondiale qui vivra en France.

**EXERCICE 3** **5 points**

Une entreprise fabrique un modèle de meuble en bois. Elle peut produire au maximum 100 meubles par jour.
Pour $x$ meubles fabriqués et vendus, le coût de production journalier (exprimé en euros), noté $C(x)$, est donné par :

$$C(x) = 2,25x^2 - 6x + 20$$

Chaque meuble est vendu 299 €.
L'entreprise est ouverte cinq jours par semaine.
Le chef d'entreprise a réalisé la feuille de calcul suivante :

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $x$ | Recette | Coût | Bénéfice |
| 2 | 0 | 0 | 20 | $-20$ |
| 3 | 10 | 2 990 | 185 | 2805 |
| 4 | 20 | | | |
| 5 | 30 | | | |
| 6 | 40 | | | |
| 7 | 50 | | | |
| 8 | 60 | | | |
| 9 | 70 | | | |
| 10 | 80 | | | |
| 11 | 90 | | | |
| 12 | 100 | | | |

1. **a.** Une formule qui, saisie dans la cellule B2, permet d'obtenir par recopie vers le bas, la recette en fonction du nombre de meubles fabriqués et vendus chaque jour est : =299*$A2.

   **b.** Une formule qui, saisie dans la cellule C2, permet d'obtenir, par recopie vers le bas, le coût en fonction du nombre de meubles fabriqués et vendus chaque jour est : = $A2*(2,25*$A2 −6)+20.

   **c.** Calculons les valeurs associées aux cellules B7, C7 et D7.

   **En B7** nous obtenons $299 \times 50 = 14\,950$

   **en C7** $50 \times (2,25 \times 50 - 6) + 20 = 5\,345$

   **en D7** $14\,950 - 5\,345 = 9\,605$

2. Montrons que le bénéfice journalier correspondant à la production et la vente de $x$ meubles ($x \in [0~;~100]$) est donné par $B(x) = -2,25x^2 + 305x - 20$.
   Sachant que le bénéfice est égal à la différence entre la recette et les coûts, nous avons donc pour $x \in [0~;~100]$
   $B(x) = 299x - \left(2{,}25x^2 - 6x + 20\right) = -2{,}25x^2 + 305x - 20$.
   Nous obtenons bien la valeur attendue.

**3.** $B'(x) = -2{,}25(2x) + 305 = -4{,}5x + 305$.

Pour dresser le tableau de variation de $B$, étudions d'abord le signe de $B'(x)$.

Sur $\mathbb{R}$, $-4{,}5x+305 > 0$ si et seulement si $x < \dfrac{610}{9}$. Il en résulte que si $x \in \left[0\,;\,\dfrac{610}{9}\right[$, $B'(x) > 0$ et

si $x \in \left]\dfrac{610}{9}\,;\,100\right]$, $B'(x) < 0$

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors $f$ est strictement croissante sur $I$.

Pour $x \in \left[0\,;\,\dfrac{610}{9}\right[$, $B'(x) > 0$ par conséquent $B$ est strictement croissante sur cet intervalle.

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction $f$ est strictement décroissante sur $I$.

Pour $x \in \left]\dfrac{610}{9}\,;\,100\right]$, $B'(x) > 0$, par conséquent $B$ est strictement décroissante sur cet intervalle.

Dressons le tableau de variation de $B$ sur $[0\,;\,100]$.

| $x$ | $0$ | | $\frac{610}{9}$ | | $100$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $B'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| Variation de $B$ | $-20$ | $\nearrow$ | $\frac{92\,845}{9}$ | $\searrow$ | $7\,980$ |

$\dfrac{610}{9} \approx 67{,}78 \qquad \dfrac{92\,845}{9} \approx 10\,316{,}11$

**4.** Déterminons combien de meubles il faut produire et vendre pour réaliser un bénéfice journalier maximal. Le nombre de meubles devant être un entier naturel, comparons le bénéfice pour $x = 67$ ou $x = 68$, valeurs encadrant la valeur pour laquelle la fonction $B$ admet un maximum.

$B(67) = 10\,314{,}75 \quad B(68) = 10\,316$. Pour obtenir un bénéfice journalier maximal, il faudra produire 68 meubles.

Le bénéfice maximal que peut réaliser l'entreprise sur une période de quatre semaines est de 206 320 euros. L'entreprise travaille cinq jours par semaine soit 20 jours et réalise un bénéfice de 10 316 euros par jour,

$(20 \times 10\,316 = 206\,320)$.

**EXERCICE 4** **6 points**

**Partie A**

Une entreprise de 2 000 salariés compte 1 200 techniciens et 800 ingénieurs.

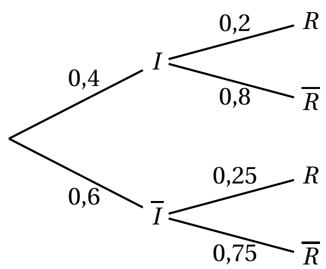
Parmi les techniciens, 25 % déjeunent dans le restaurant de l'entreprise.

Parmi les ingénieurs, 20 % déjeunent dans ce même restaurant.

On interroge un salarié au hasard.

On note $I$ l'évènement « le salarié interrogé est ingénieur » et $R$ l'évènement « le salarié interrogé déjeune dans le restaurant de l'entreprise ».

Pour tout évènement $E$, on note $\overline{E}$ son évènement contraire et $p(E)$ sa probabilité.




**1.** Complétons l'arbre de probabilités ci-dessus.

**2.** Montrons que $p(R) = 0{,}23$.

$p(R) = p(I) \times p_I(R) + p(\overline{I}) \times p_{\overline{I}}(R) = 0{,}4 \times 0{,}2 + 0{,}6 \times 0{,}25 = 0{,}23$

**3.** Un salarié sort du restaurant de l'entreprise après y avoir déjeuné.

Calculons la probabilité, arrondie au millième, pour qu'il soit ingénieur.

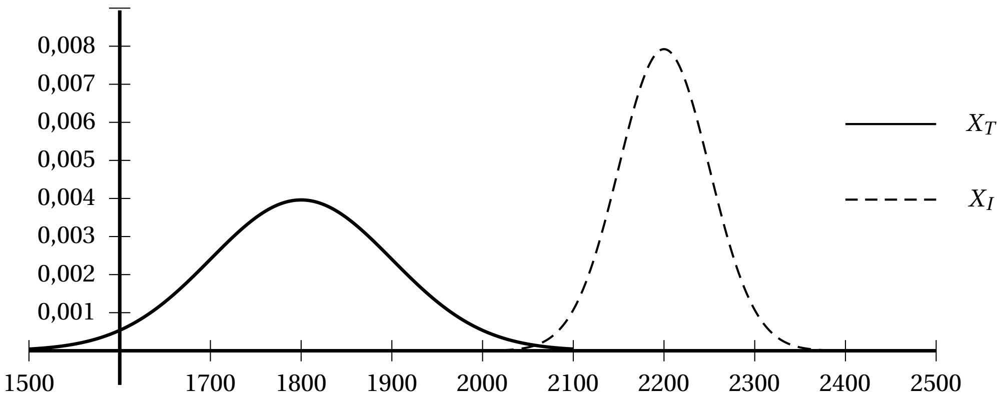
La probabilité que le salarié soit ingénieur sachant qu'il a déjeuné au restaurant de l'entreprise est notée $p_R(I)$.

$p_R(I) = \dfrac{p(R \cap I)}{p(R)} = \dfrac{0,4 \times 0,2}{0,23} \approx 0,3478$.

Sachant que la personne interrogée a déjeuné au restaurant d'entreprise, la probabilité qu'elle soit ingénieur est 0,348.

**Partie B**

On rappelle que cette entreprise est composée de 1 200 techniciens et de 800 ingénieurs.
On modélise le salaire mensuel, exprimé en euros, d'un technicien de l'entreprise par une variable aléatoire $X_T$ suivant une loi normale d'espérance $m_T$ et d'écart type 200.
On modélise le salaire mensuel, exprimé en euros, d'un ingénieur de l'entreprise par une variable aléatoire $X_I$ suivant une loi normale d'espérance $m_I$ et d'écart type 150.
On donne ci-dessous la représentation graphique des fonctions de densité des variables $X_T$ et $X_I$.




**1.** À la précision permise par le graphique,nous pouvons lire $m_T = 1800$ et $m_I = 2200$. Nous considérons l'axe de symétrie des courbes passant par leur sommet.

**2.** À l'aide de la calculatrice, $p\,(X_T \leqslant 1600) = 0,16$.

Nous pouvons remarquer que $1600 = 1800 - 200$. Or $p(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0,68$ d'où $p(X \leqslant \mu - \sigma) = p(X \geqslant \mu + \sigma) = \dfrac{1 - 0,68}{2} = 0,16$.

**3.** Une estimation du nombre de techniciens dont le salaire mensuel est inférieur ou égal à 1 600 € par mois est alors de 192 personnes $0,16 \times 1200 = 192$.

**Partie C**

Une restructuration de l'entreprise a permis de promouvoir 250 techniciens au statut d'ingénieur.
Les deux tableaux suivants rendent compte de cette évolution.

| Avant restructuration | Techniciens | Ingénieurs |
|---|---|---|
| Effectif | 1 200 | 800 |
| Salaire mensuel moyen | 1 800 | 2 200 |

| Après restructuration | Techniciens | Ingénieurs |
|---|---|---|
| Effectif | 950 | 1 050 |
| Salaire mensuel moyen | 1 764 | 2 156 |

**1. a.** Calculons le taux d'évolution, exprimé en pourcentage, du salaire mensuel moyen des techniciens.

Le taux est défini par $\frac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}}$. $t_T = \dfrac{1764 - 1800}{1800} = -0,02$.

Le taux d'évolution moyen du salaire des techniciens est une baisse de 2 %.

**b.** Calculons le taux d'évolution, exprimé en pourcentage, du salaire mensuel moyen des ingénieurs.

$t_I = \dfrac{2\,156 - 2\,200}{2\,200} = -0,02$. Le taux d'évolution moyen du salaire des ingénieurs est une baisse de 2 %.

**2.** **a.** Calculons la masse salariale (c'est-à-dire le montant total des salaires de tous les employés) avant et après la restructuration.

— Avant la restructuration : $1\,800 \times 1\,200 + 2\,200 \times 800 = 3\,920\,000$

— Après la restructuration : $1\,764 \times 950 + 2\,156 \times 1\,050 = 3\,939\,600$

**b.** Essayons d'expliquer pourquoi la masse salariale a augmenté alors que le salaire mensuel moyen de chaque catégorie a diminué.

La masse salariale globale augmente car les effectifs de chaque catégorie changent.

Il est probable que les techniciens promus avaient des salaires supérieurs à la moyenne et que leur nouveau salaire soit inférieur à la moyenne de celui des ingénieurs.