Corrigé du baccalauréat STMG Antilles-Guyane septembre 2015

Durée : 3 heures

EXERCICE 1 **4 points**

Dans un supermarché ouvert de 9 h à 20 h, on a relevé le nombre de clients présents en caisse à différentes heures de la journée. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant.

Heure	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Nombre de clients	68	32	22	55	52	79	108	131	144	138	110

Le nuage de points associé à ces relevés est donné en annexe.

1. Les points n'étant guère alignés, c'est pourquoi il n'est pas pertinent d'envisager un ajustement affine de ce nuage de points.

Dans toute la suite de l'exercice, on modélise le nombre de clients présents en caisse à l'instant t exprimé en heures par la fonction N définie sur $[10; 20]$ par : $N(t) = -t^3 + 45,375t^2 - 657t + 3\,100$.

2. Pour estimer, selon ce modèle, le nombre de clients attendus en caisse à 15 h 30, calculons $N(15{,}5)$.

$N(15{,}5) \approx 94$.

3. Déterminons l'expression algébrique de $N'(t)$, où N' désigne la fonction dérivée de N sur l'intervalle $[10; 20]$.

$N'(t) = -3t^2 + 45{,}375(2t) - 657 = -3t^2 + 90{,}75t - 657$.

4. **a.** Résolvons sur $[10; 20]$ l'équation $N'(t) = 0$.

Déterminons sur $\mathbb{R}$ les racines de $-3t^2 + 90{,}75t - 657$

C' est un trinôme du second degré. Calculons le discriminant Δ.

$\Delta = (90,75)^2 - 4 \times (-3) \times (-657) = 351{,}562\,5 = (18,75)^2$.

$\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines $t_1 = \dfrac{-90,75 - 18,75}{2 \times (-3)} = 18{,}25$ $t_2 = \dfrac{-90,75 + 18,75}{2 \times (-3)} = 12$.

Ces racines appartenant à $[10; 20]$, les solutions de l'équation $N'(t) = 0$ sont les mêmes.

$N'(t) = -3(t - 12)(t - 18{,}25)$.

b. Étudions le signe de N' sur l'intervalle $[10; 20]]$.

t	10		12		18,25		20
$t-12$		$-$	0	$+$		$+$	
$t-18,25$		$-$		$-$	0	$+$	
-3		$-$		$-$		$-$	
$N'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

c. Étudions le sens de variation de f.

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

Sur $[10 ; 12[$ ou sur $]18{,}25 ; 20]$, $f'(x) < 0$, par conséquent la fonction f est strictement décroissante sur chacun de ces intervalles.

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors la fonction f est strictement croissante sur I.

Pour $x \in]12 ; 18{,}25[$, $f'(x) > 0$ par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.

Dressons le tableau de variation de f sur$[10; 20]$. $N(10) = 67{,}5$ $\quad N(18{,}25) = 144{,}070\,312\,5$, par conséquent dans le tableau ces valeurs sont arrondies à l'entier le plus proche.

x	10		12		18,25		20
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variation de f	≈ 68	$\searrow$	22	$\nearrow$	≈ 144	$\searrow$	110

5. Le gérant affirme que le nombre de clients est maximal entre 18 h et 18 h 30.

   C'est confirmé par le modèle puisque N admet un maximum pour $t = 18{,}25$ c'est-à-dire 18 h 15.

6. La valeur du tableau qui peut être considérée comme aberrante par rapport au modèle choisi est 55 puisque il y a 22 personnes pour $t = 12$ et 52 personnes pour $t = 14$, . La fonction étant croissante sur $[12\,;\,14]$, la valeur de l'effectif pour $t = 13$ devrait donc être comprise entre 22 et 52 exclus.

EXERCICE 2 — 5 points

La population mondiale était d'environ 5 321 millions en 1990.
L'évolution de cette population tous les cinq ans depuis 1990 est donnée par le tableau ci-dessous :

Année	1990	1995	2000	2005	2010
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4
Taux d'évolution (arrondi à 0,01 %)		+ 7,91 %	+ 6,72 %	+ 6,30 %	+ 6,17 %
Effectif y_i (arrondi au million)	5 321	5 742	6 128		6 916

Source : INSEE

Exemple de lecture : la population mondiale a augmenté de 7,91 % entre 1990 et 1995.

Partie A

1. Calculons l'effectif de la population mondiale en 2005, arrondi au million.

   À un taux d'évolution t correspond un coefficient multiplicateur $1 + t$. Nous avons $t = 0{,}063$, le coefficient multiplicateur est alors 1,063.

   $6\,128 \times 1{,}063 \approx 6\,514$ l'effectif de la population mondiale en 2005 est, à un million près, d'environ 6 514 millions.

2. **a.** Déterminons le taux d'évolution de la population mondiale entre 1990 et 2010.

   Le taux d'évolution est défini par $\dfrac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}}$. $T = \dfrac{6916 - 5321}{5321} \approx 0{,}299\,76$

   Le taux d'évolution de la population mondiale entre 1990 et 2010 est d'environ 29,98 % arrondi à 0,01 %.

   b. Calculons le taux d'évolution annuel moyen de l'année 1990 à l'année 2010, arrondi à 0,01 %.

   En appelant t_m le taux moyen, le coefficient multiplicateur global est aussi $(1 + t_m)^{20}$ puisque il y a eu 20 évolutions durant cette période.

   $(1 + t_m)^{20} = 1{,}299\,76$ par conséquent $t_m = 1{,}299\,76^{\frac{1}{20}} - 1 \approx 0{,}013\,2$.

   Le taux d'évolution annuel moyen entre 1990 et 2010 est d'environ 1,32 % arrondi à 0,01 %.

   c. On suppose que la population augmente chaque année de 1,3 % à partir de 2010.

   Donnons une estimation de la population mondiale attendue en 2020, arrondie au million. Entre 2010 et 2020 il y a 10 années. $6\,916 \times 1{,}013^{10} \approx 7\,869{,}54$.

   Nous pouvons estimer la population mondiale à environ 7 870 millions en 2020 sur la base d'un taux d'évolution annuel de 1,3 %.

Partie B

1. À l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement D de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés est $y = 396{,}2x + 5\,331{,}8$. Les coefficients sont arrondis au dixième.

2. On décide d'ajuster ce nuage de points par la droite D d'équation $y = 396x + 5\,332$.

   Selon ce modèle, estimons l'effectif de la population mondiale en 2020. En 2020 $x = 6$ remplaçons x par 6 dans l'équation de la droite $y = 396 \times 6 + 5\,332 = 7\,708$.

   Selon ce modèle,nous pouvons estimer la population mondiale à environ 7 708 millions en 2020.

EXERCICE 3 **6 points**

Un employeur donne le choix à un salarié à temps partiel entre deux modes de rémunération :

- proposition A : salaire mensuel brut de 1 200 € au premier janvier 2015 puis, chaque année au premier janvier, augmentation de 15 € du salaire mensuel brut;
- proposition B : salaire mensuel brut de 1 000 € au premier janvier 2015, puis, chaque année au premier janvier, augmentation de 4 % du salaire mensuel brut.

On se propose d'étudier quelle est la proposition la plus intéressante pour ce salarié.
On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- u_n le salaire mensuel brut au premier janvier de l'année $(2015 + n)$ pour la première proposition;
- v_n le salaire mensuel brut au premier janvier de l'année $(2015 + n)$pour la deuxième proposition.

1. Puisque, dans la proposition A, son salaire est augmenté de 15 euros chaque année

   $u_1 = 1\,200 + 15 = 1\,215$, $u_2 = 1\,215 + 15 = 1\,230$

   Puisque dans la proposition B son salaire est augmenté de 4 % par conséquent multiplié par 1,04

   $v_1 = 1\,000 \times 1{,}04$ et $v_2 = 1\,040 \times 1{,}04 = 1\,081{,}60$.

2. Donnons la nature et la raison de chacune des suites (u_n) et (v_n).

   Puisque, dans la proposition A, son salaire est augmenté de 15 euros chaque année donc d'une quantité constante, la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison 15 et de premier terme 1 200.

   Puisque dans la proposition B, son salaire est augmenté de 4 % par conséquent multiplié par 1,04 donc toujours multiplié par un même nombre, la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 1,04 et de premier terme 1 000.

3. Exprimons, pour tout entier naturel n, u_n et v_n en fonction de n.

   Le terme général d'une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r est $u_n = u_0 + (n)r$.

   $u_n = 1\,200 + 15n$

   Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est $u_n = u_0 \times (q)^n$.

   $v_n = 1\,000 \times (1{,}04)^n$

4. Calculons, pour chacune des deux propositions, le salaire mensuel brut en 2023. En 2023 $n = 8$, par conséquent $u_8 = 1\,200 + 15 \times 8 = 1\,320$ et $v_8 = 1\,000 \times (1{,}04)^8 \approx 1\,369$

   Les résultats sont arrondis à l'euro.

5. Une feuille de calcul a été élaborée dans le but de calculer le salaire mensuel brut, au premier janvier de chaque année, pour chacune des deux propositions de rémunération.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Année	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027
2	u_n	1 200	1 215											
3	v_n	1 000	1 040											

a. Une formule qui, entrée en cellule C2, permet, par recopie vers la droite, d'obtenir le contenu de la plage C2 : N2 est :=B$2+15.

b. Une formule qui, entrée en cellule C3, permet, par recopie vers la droite, d'obtenir le contenu de la plage C3 : N3 est =B$3*1,04.

6. Déterminons à partir de quelle année le salaire mensuel brut obtenu avec la proposition B dépasse celui de la proposition A. En calculant les différentes valeurs des deux suites, nous constatons que pour $n = 7$ $u_7 = 1305$ et $v_7 = 1315{,}93$.

$2015 + 7 = 2022$, par conséquent à partir de 2022 le salaire obtenu avec la proposition B dépasse celui obtenu avec la proposition A.

EXERCICE 4 — 5 points

Un distributeur de tomates est approvisionné par trois producteurs. Le premier producteur fournit 70 % de l'approvisionnement de ce distributeur, le reste provenant, à parts égales, des deux autres producteurs.

Avant d'être conditionnées, les tomates sont calibrées par une machine qui les trie selon leur diamètre. Les tomates dont le diamètre est conforme aux normes en vigueur sont conservées, les autres, dites « hors calibre », sont rejetées.
Il a été constaté que 5 % des tomates fournies par le premier producteur sont hors calibre, 20 % des tomates fournies par le second producteur sont hors calibre et 4 % des tomates fournies par le troisième producteur sont hors calibre.
Chaque jour les tomates livrées par les différents producteurs sont entreposées dans le même hangar. Pour l'étude qui suit, on convient qu'elles sont bien mélangées.
Un contrôle de qualité sur les tomates est effectué de la manière suivante : un contrôleur choisit au hasard une tomate dans ce hangar, puis mesure son diamètre pour déterminer si elle est de « bon calibre »ou « hors calibre ».
On note A_1, A_2, A_3 et C les évènements :

- A_1 : « la tomate prélevée provient du premier producteur » ;
- A_2 : « la tomate prélevée provient du deuxième producteur » ;
- A_3 : « la tomate prélevée provient du troisième producteur » ;
- C : « la tomate prélevée est de bon calibre ».

(Pour tout évènement E, on note $\overline{E}$ son évènement contraire et $p(E)$ sa probabilité.

1. En utilisant les données de l'énoncé, complétons l'arbre donné en annexe.

2. Justifions que $p(A_2) = 0,15$.

Nous savons que $p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) = 1$, en outre $p(A_2) = p(A_3)$. Par conséquent $0{,}7 + 2p(A_2) = 1$ d'où $p(A_2) = 0{,}15$.

3. La probabilité que la tomate prélevée ait le bon calibre et provienne du troisième producteur est notée

$p(C \cap A_3)$. Or $p(C \cap A_3) = p(A_3) \times p_{A_3}(C) = 0,15 \times 0{,}96 = 0,144$.

4. Montrons que la probabilité que la tomate prélevée ait le bon calibre est égale à 0,929.

$p(C) = p(A_1 \cap C) + p(A_2 \cap C) + p(A_3 \cap C) = p(A_1) \times p_{A_1}(C) + p(A_2) \times p_{A_2}(C) + p(A_3) \times p_{A_3}(C)$

$p(C) = 0{,}7 \times 0{,}95 + 0{,}15 \times 0{,}8 + 0{,}15 \times 0{,}96 = 0{,}665 + 0{,}12 + 0{,}144 = 0{,}929$

5. La tomate prélevée est hors calibre. Le contrôleur affirme : « Cette tomate provient très probablement du deuxième producteur ».

Calculons $p_{\overline{C}}(A_2) = \dfrac{p\left(A_2 \cap \overline{C}\right)}{p\left(\overline{C}\right)} = \dfrac{0{,}15 \times 0{,}2}{1 - 0{,}929} \approx 0{,}4225.$

Pour comparer calculons $p_{\overline{C}}(A_1) = \dfrac{p\left(A_1 \cap \overline{C}\right)}{p\left(\overline{C}\right)} = \dfrac{0{,}7 \times 0{,}05}{1 - 0{,}929} \approx 0{,}4930.$

Par conséquent le contrôleur a tort, elle provient plus probablement du premier producteur.

6. Le contrôleur prélève au hasard un lot de sept tomates. Le nombre de tomates est suffisamment grand pour assimiler ces prélèvements à des tirages indépendants avec remise.

À l'aide de la calculatrice, déterminons la probabilité, à 0,001 près, qu'il y ait exactement cinq tomates de bon calibre dans le lot.

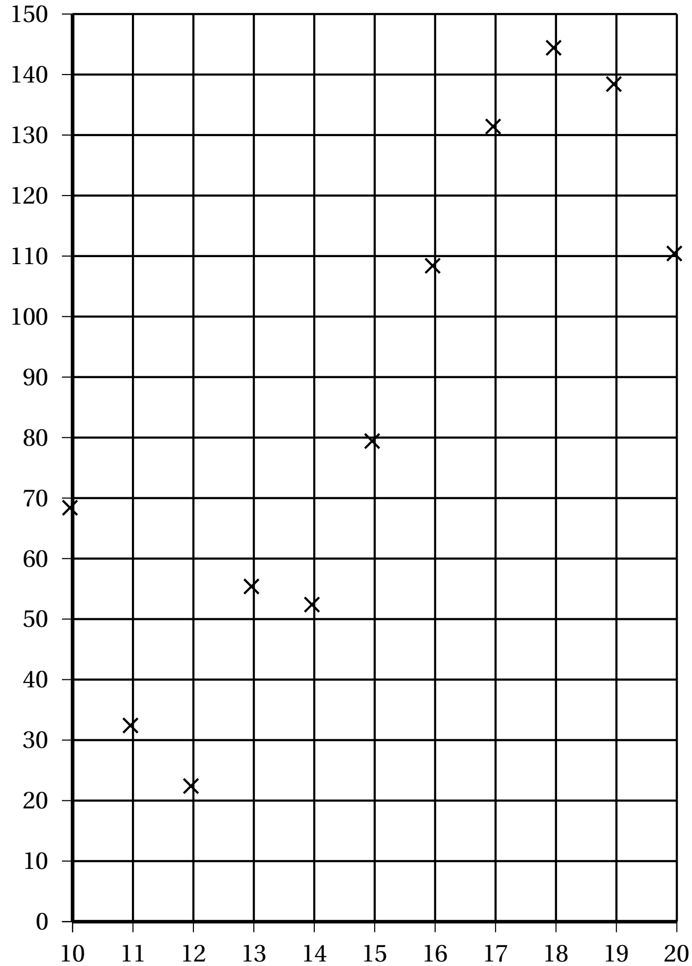
$p(X = 5) = \dbinom{7}{5} \times 0{,}929^5 \times (1 - 0{,}929)^2 \approx 0{,}073$

7. Le diamètre en cm d'une tomate de bon calibre est modélisé par la loi normale d'espérance $\mu = 6$ et d'écart type $\sigma = 0,5$.

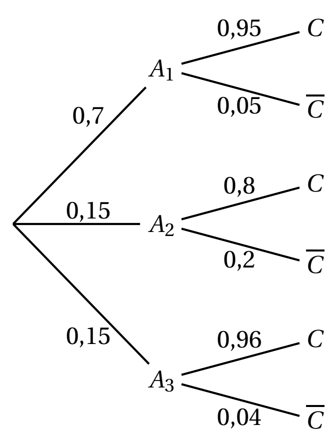
On choisit une tomate de bon calibre au hasard. À l'aide de la calculatrice, déterminons à 0,01 près :

- **a.** la probabilité que la tomate ait un diamètre compris entre 5 cm et 7 cm ; $p(5 \leqslant Y \leqslant 7) \approx 0{,}95$
- **b.** la probabilité que la tomate ait un diamètre inférieur ou égal à 5,5 cm. $p(Y \leqslant 5{,}5) \approx 0{,}16$

Annexe à rendre avec la copie Annexe (Exercice 1)



Annexe (Exercice 4)



Si vous photocopiez ce corrigé pensez à en créditer l'**A. P. M. E. P.**, merci.