∽ Corrigé du baccalauréat STMG Nouvelle-Calédonie ∾
19 novembre 2015

EXERCICE 1 **5 points**

Le tableau ci-dessous donne la consommation de soins et de biens médicaux (CSBM) en France, en milliards d'euros :

Année	2000	2004	2005	2009	2011
CSBM en milliards d'euros	114,6			171,1	180

Source : Drees, Comptes de la santé

1. Sachant que l'augmentation entre 2000 et 2005 a été de 29,2 %, calculons la CSBM en France en 2005. À une augmentation au taux t correspond le coefficient multiplicateur $(1 + t)$. À une augmentation de 29,2 % correspond donc un coefficient multiplicateur de 1,292.

La consommation de biens médicaux en 2005 est par conséquent en milliards d'euros de $114,6 \times 1,292$ c'est-à-dire de 148,1, résultat arrondi au dixième.

2. Déterminons le taux d'évolution global de la CSBM en France entre 2000 et 2011.

Le taux d'évolution t est défini par $t = \dfrac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}}$. $t = \dfrac{180 - 114,6}{114,6} \approx 0,570\,580$.

Le taux d'évolution global sous forme de pourcentage arrondi au dixième, entre 2000 et 2011 a été de 57,1 %

3. Démontrons alors que le taux annuel moyen d'augmentation de la CSBM en France entre 2000 et 2011, arrondi au dixième, est égal à 4,2 %.

En appelant t_m le taux annuel moyen d'évolution et T le taux global d'évolution, nous avons par conséquent $1 + T = (1 + t_m)^{11}$ puisqu'il y a eu 11 années d'évolution. $1 + 0,571 = (1 + t_m)^{11}$ d'où

$t_m = 1,571^{1/11} - 1 \approx 0,041\,9$.

Nous avons donc bien un taux annuel moyen d'évolution en pourcentage arrondi au dixième de 4,2 %.

4. Dans cette question, on admet que le taux annuel d'augmentation de la CSBM en France entre 2000 et 2011 reste constamment égal à 4,2 %.

a. Calculons la CSBM en France en 2004. Le coefficient multiplicateur est donc $(1,042)^4$ puisqu'il y a eu quatre augmentations entre 2000 et 2004. $114,6 \times 1,042^4 \approx 135,1$. La CSBM en 2004, arrondie au dixième est de 135,1 milliards d'euros.

b. L'affirmation « si l'évolution se poursuit ainsi, la CSBM en France dépassera 200 milliards d'euros en 2015 » est vraie car $180 \times 1,042^4 \approx 212,2$.

5. Entre 2006 et 2011, une étude plus détaillée donne l'évolution de la CSBM en France.

Année	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Rang de l'année : (x_i)	1	2	3	4	5	6
Consommation (CSBM) en milliards d'euros : (y_i)	153,7	160,4	165,7	171,1	175,4	180

a. À l' aide de la calculatrice, une équation de la droite $\mathscr{D}$ qui réalise un ajustement affine du nuage de points $(x_i\ ;\ y_i)$ obtenu par la méthode des moindres carrés est $y = 5,197\,14x + 149,526$. En arrondissant les coefficients au centième, nous obtenons alors $y = 5,20x + 149,53$.

b. On admet que la droite d'équation $y = 5,2x + 149,5$ réalise un bon ajustement du nuage de points $(x_i\ ;\ y_i)$.
En utilisant cet ajustement affine, la CSBM à laquelle on peut s'attendre, en France, en 2015 dépassera 200 milliards d'euros. En effet, le rang de l'année 2015 étant 10, en remplaçant x par cette valeur dans l'équation de la droite, nous obtenons $y = 5,2 \times 10 + 149,5 = 201,5$

EXERCICE 2 **5 points**

Jean envisage de mettre de l'argent de côté en vue d'un achat. Il imagine deux plans d'épargne sur 12 mois.

Plan 1 : le premier versement mensuel est de 400 € et, chaque mois, les versements mensuels diminuent de 30 € par rapport au mois précédent.

Plan 2 : le premier versement mensuel est de 400 € et, chaque mois, les versements mensuels diminuent de 10 % par rapport au mois précédent.

Partie 1 : utilisation d'un tableur

Jean utilise un tableur pour comparer les deux plans et on donne, dans **l'annexe à rendre avec la copie**, un extrait de la feuille de calcul qu'il a créée.
La colonne C est au format nombre décimal à deux décimales.

1. Une formule, à recopier dans la plage C4 :C13, que Jean a pu saisir dans la cellule C3 est =$C2*0,9.
2. Dans la cellule C4, nous pourrons lire 324,00 puisque la colonne est au format nombre décimal à deux décimales. ($360 \times 0,9$)
3. Une formule que Jean peut saisir dans la cellule B14 pour obtenir le montant total des 12 versements mensuels du **plan 1** est : =SOMME($B2 :$B13).

   L'écriture de $ n'est pas indispensable.

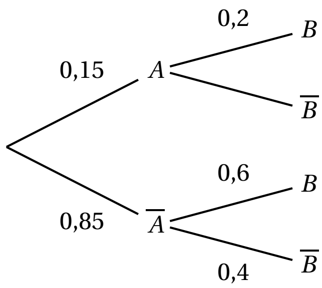
Partie 2 : comparaison de deux suites

1. On note u_n le montant du n-ième versement mensuel du **plan 1**.
   Ainsi on a : $u_1 = 400$ et $u_2 = 370$.
   a. La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison -30 puisque chaque terme se déduit du précédent, sauf le premier en ajoutant -30. Le premier terme de la suite est 400.
   b. Calculons u_{12}.
   Le terme général d'une suite arithmétique de premier terme u_1 et de raison r est $u_n = u_1 + (n-1)r$.
   $u_{12} = 400 + 11 \times (-30) = 70$
   c. La colonne B du tableau de **l'annexe à rendre avec la copie** y est complétée.
2. On note v_n le montant du n- ième versement mensuel du **plan 2**. Ainsi on $v_1 = 400$ et $v_2 = 360$.
   a. La suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9, coefficient multiplicateur associé à une baisse de 10 %. Chaque terme se déduit du précédent excepté le premier, en le multipliant par un même nombre. Le premier terme de la suite est 400.
   b. Calculons v_{12}.
   Le terme général d'une suite géométrique de raison q et de premier terme u_1 est $u_n = u_1 q^{n-1}$.
   $v_{12} = 400 \times 0,9^{11} \approx 125,52$.
   c. À l'aide de la calculatrice, la colonne C du tableau de **l'annexe à rendre avec la copie** y est complétée.
3. Le plan qui assure à Jean la somme épargnée la plus élevée est le **plan 2**. Il aura épargné 70,28 euros de plus qu'avec le **plan 1**.
   Expliquer la réponse.

EXERCICE 3 **4 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).
Pour chacune des quatre questions, de Q1 à Q4, trois réponses sont proposées, une seule réponse est correcte.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier sur la copie la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Chaque réponse correcte rapporte 1 *point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.*

1. On considère l'arbre de probabilités suivant :



Q1 : $P_A\left(\overline{B}\right)$ a pour valeur :

- ~~0,85~~
- ~~0,4~~
- $\boxed{0,8}$

Q2 : $p(B)$ a pour valeur :

- $\boxed{0,54}$
- ~~0,8~~
- ~~0,12~~

2. X est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 59$ et d'écart type $\sigma = 0,2$.

Q3 : $p(X < 59)$ vaut :

- $\boxed{0,5}$
- ~~0,35~~
- ~~0,16~~

Q4 : Un intervalle de fluctuation au seuil approximatif de 95 % de la variable X est l'intervalle :

- ~~[58,8 ; 59,2]~~
- $\boxed{[58,6 ; 59,4]}$
- ~~[58,4 ; 59,6]~~

EXERCICE 4 — 6 points

Une entreprise fabrique des croquettes pour chiens. Chaque jour, elle en fabrique entre 0 et 80 tonnes. Le coût de fabrication, en euros, de x tonnes est modélisé par la fonction f dont la représentation graphique est donnée en annexe à rendre avec la copie.

Partie A : lecture graphique

À l'aide du graphique de **l'annexe à rendre avec la copie**, répondons aux questions suivantes avec la précision permise par le graphique. *On laissera apparents les traits de construction.*

1. La production de 50 tonnes de croquettes coûte environ 51 000 euros. Nous lisons l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 50. Avec la précision permise par le graphique nous obtenons environ 51 000.
2. La quantité de croquettes que l'on peut produire pour un coût de fabrication de 100 000 € est d'environ 72,2 tonnes. Nous lisons l'abscisse du point de la courbe d'ordonnée 100 000.

Partie B : étude de la recette

Une tonne de croquettes est vendue 1 900 €. La recette, pour x tonnes vendues, est donc donnée par la fonction R définie sur l'intervalle $[0 ; 80]$ par $R(x) = 1900x$.

1. La représentation graphique de la fonction R est tracée sur le graphique donné en **annexe à rendre avec la copie**. Pour tracer ce segment, nous avons pris les points $(0 ; 0)$ et $(80 ; 140000)$.

2. L'entreprise ne réalise pas un bénéfice en vendant 10 tonnes de croquettes. La courbe représentant les coûts est au dessus de celle représentant les recettes.

Partie C : étude du bénéfice

On admet que le bénéfice réalisé par la vente de x tonnes de croquettes est donné par la fonction B définie sur l'intervalle $[0\,;\,80]$ par

$$B(x) = -x^3 + 105x^2 - 1\,800x - 4\,000.$$

1. Calculons $B'(x)$ où B' désigne la dérivée de la fonction B.
   $B'(x) = -(3x^2) + 105(2x) - 1\,800 - 0 = -3x^2 + 210x - 1\,800$
2. Justifions que le signe de $B'(x)$ est donné par le tableau suivant :

x	0		10		60		80
Signe de $B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   Calculons les racines de $B'(x)$. $\Delta = 210^2 - 4 \times (-3) \times (-1\,800) = 22\,500$
   Le trinôme admet deux racines. $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\quad x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
   $x_1 = \dfrac{-210-\sqrt{22\,500}}{2\times(-3)} = \dfrac{210+150}{6} = 60 \qquad x_2 = \dfrac{210-150}{6} = 10.$
   Par conséquent $B'(x) = -3(x-10)(x-60)$.

x	0		10		60		80
-3		$-$		$-$		$-$	
$x-10$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-60$		$-$		$-$	0	$+$	
$B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3. Étudions d'abord le sens de variation de B.
   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.
   Sur $]10\,;\,60[$, $B'(x) > 0$ par conséquent B est strictement croissante sur cet intervalle.
   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.
   Sur $[0\,;\,10[$ ou sur $]60\,;\,80]$ $B'(x) < 0$, par conséquent B est strictement décroissante sur chacun de ces intervalles.
   Dressons maintenant le tableau de variation de B sur l'intervalle $[0\,;\,80]$

x	0		10		60		80
$B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variation de B	$-4\,000$	$\searrow$	-12500	$\nearrow$	50000	$\searrow$	12000

4. D'après le tableau de variation, B admet un maximum pour $x = 60$. Il en résulte que la quantité de croquettes que l'entreprise doit vendre pour réaliser un bénéfice maximal est de 60 tonnes. Ce bénéfice est alors de 50 000 euros.
5. On rappelle que le coût de fabrication de x tonnes de croquettes est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,80]$ par $f(x) = R(x) - B(x)$.
   On envisage d'augmenter le prix d'une tonne de croquettes défini dans la partie B afin d'obtenir un bénéfice supérieur ou égal à 90 000 €.
   Proposons une démarche permettant de trouver un prix d'une tonne de croquettes aboutissant à ce résultat.

Commençons par déterminer la fonction coût.
$f(x) = 1900x - (-x^3 + 105x^2 - 1800x - 4000) = x^3 - 105x^2 + 3700x + 4000$
La fonction recette S sera alors pour un bénéfice de 90 000 : $S(x) = f(x) + 90000$.
Le prix d'une tonne sera alors de $\dfrac{S(x)}{x}$
Graphiquement, nous pouvons tracer la courbe de S en effectuant une translation de celle de f par la translation de vecteur $90000\vec{\jmath}$ autrement dit nous augmentons toutes les valeurs $f(x)$ de 90 000.
Maintenant si l'on décide de fabriquer par exemple 50 tonnes de croquettes, soit M le point d'abscisse 50 et d'ordonnée, l'ordonnée du point de la courbe de S. Lisons alors le coefficient directeur de la droite (OM). Nous lisons environ 2 800. Pour avoir un bénéfice de 90 000 euros en fabriquant 50 tonnes de croquettes, il faudrait vendre la tonne environ 2 800 euros. Tracé en rouge sur le graphique.
En utilisant un tableur :
quelques exemples

	A	B	C	D	E
1	Tonnes de croquettes par jour x	coût $f(x)$	recette $f(x)+90000$	prix unitaire en €	arrondi à la centaine supérieure
2	0	4 000			
3	1	7 596	97 596	97 596	97 600
4	2	10 988	100 988	50 594	50 600
5					
6	40	48 000	138 000	3 450	3 500
7					
8	45	49 000	139 000	3 088,89	3 100
9					
10	50	51 500	141 500	2 830	2 900
11					
12	60	64 000	154 000	2 566,67	2 600
13	61	65 976	155 976	2 556,98	2 600
14					
15	64	72 864	162 864	2 544,75	2 600
16					
17	70	91 500	181 500	2 592,86	2 600
18					
19	75	112 750	202 750	2 703,33	2 700
20	80	140 000	230 000	2 875	2 900

ANNEXE

Exercice 2

	A	B	C
1		Plan 1	Plan 2
2	1$^{\text{er}}$ versement mensuel	400	400,00
3	2$^{\text{e}}$ versement mensuel	370	360,00
4	3$^{\text{e}}$ versement mensuel	340	324,00
5	4$^{\text{e}}$ versement mensuel	310	291,60
6	5$^{\text{e}}$ versement mensuel	280	262,44
7	6$^{\text{e}}$ versement mensuel	250	236,20
8	7$^{\text{e}}$ versement mensuel	220	212,58
9	8$^{\text{e}}$ versement mensuel	190	191,32
10	9$^{\text{e}}$ versement mensuel	160	172,19
11	10$^{\text{e}}$ versement mensuel	130	154,97
12	11$^{\text{e}}$ versement mensuel	100	139,47
13	12$^{\text{e}}$ versement mensuel	70	125,52
14	TOTAL	2 800	2 870,28

Annexe à rendre avec la copie

Exercice 4