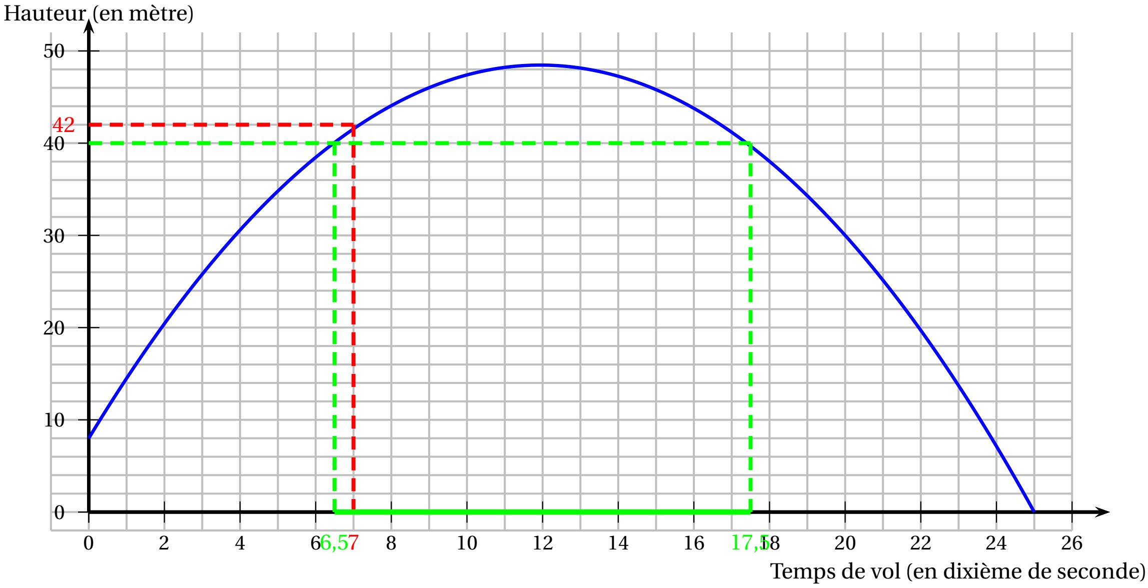
Corrigé du baccalauréat STMG Centres étrangers 13 juin 2017

EXERCICE 1 **5 points**

À l'occasion d'un festival pyrotechnique, un artificier se prépare à lancer des fusées à partir d'une plate-forme située à 8 mètres de hauteur. Il dispose de deux types de fusée, notés A et B.

Partie A

La hauteur, en mètre, atteinte par les fusées de type A en fonction de leur temps de vol x, en dixième de seconde, est modélisée par la courbe ci-dessous.



Répondre aux deux questions suivantes avec la précision permise par le graphique.

1. Quelle hauteur atteindra la fusée après 0,7 seconde de vol ?

   Solution : Le point d'abscisse 7 sur la courbe a pour ordonnée environ 42 donc la fusée de type A atteint la hauteur de 42 mètres 0,7 secondes après la mise à feu
   Voir les traits rouges sur le graphique

2. Pour des raisons de sécurité, la fusée doit exploser à une altitude supérieure à 40 mètres. Déterminer l'intervalle de temps auquel doit appartenir x pour satisfaire à cette contrainte.

   Solution :
   La droite d'équation $y = 40$ coupe la courbe aux points d'abscisses 6,5 et 17,5
   La fusée doit donc exploser entre 65 centièmes et 175 centièmes de seconde après la mise à feu
   Voir les traits verts sur le graphique

Partie B

On modélise la hauteur, en mètre, atteinte par les fusées de type B en fonction de leur temps de vol x, en dixième de seconde, par la fonction f définie pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; 20]$ par : $f(x) = -0,5x^2 + 10x + 8$.

Comme dans le cas des fusées de type A, l'explosion des fusées de type B doit avoir lieu lorsque celles-ci sont situées à une altitude supérieure ou égale à 40 mètres. On cherche à déterminer l'intervalle dans lequel doit se trouver x pour satisfaire à cette contrainte.

1. **a.** Montrer que pour satisfaire à la contrainte posée, x doit être solution de l'inéquation $-0.5x^2+10x-32 \geqslant 0$

Solution : On doit résoudre $f(x) \geqslant 40$
$f(x) \geqslant 40 \iff -0{,}5x^2+10x+8 \geqslant 40 \iff -0{,}5x^2+10x-32 \geqslant 0$

b. Dresser le tableau de signes de la fonction qui à x associe $-0{,}5x^2+10x-32$ sur l'intervalle $[0;20]$ et répondre alors au problème posé.

Solution : Soit $A(x) = -0{,}5x^2+10x-32$
$\Delta = b^2-4ac = 100-64 = 36 = 6^2 > 0$ donc l'équation $A(x) = 0$ admet deux solutions distinctes

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 2 \\ x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 8 \end{cases}$$

$A(x)$ est du signe de $a = -0{,}5$ à l'extèrieur des racines, on en déduit le tableau suivant :

x	0		2		8		20
Signe de $A(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Pour satisfaire la contrainte il faut donc que x appartienne à l'intervalle $[2 ; 8]$

2. **a.** Pour tout réel x de l'intervalle $[0;20]$, calculer $f'(x)$, f' étant la fonction dérivée de f.

Solution : $f(x) = -0{,}5x^2+10x+8$ donc $f'(x) = -x+10$

b. L'artificier souhaite connaître le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0 de la courbe représentative de f.
Donner le coefficient directeur recherché.

Solution : le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0 de la courbe représentative de f est $f'(0) = 10$

3. Pour des raisons d'esthétique, l'artificier souhaite faire exploser ses fusées de type B lorsque celles-ci seront à leur hauteur maximale. Quel temps de vol avant explosion doit-il alors programmer ?

Solution : $f'(x) = -x+10$ donc $f'(x) = 0 \iff x = 10$
on en déduit le variations de f sur $[0 ; 20]$

x	0		10		20
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	8	$\nearrow$	58	$\searrow$	8

Le maximum est donc atteint 10 dixièmes de secondes soit 1 seconde après la mise à feu

Il doit donc programmer l'explosion après 1 seconde de vol.

Exercice 2 **(5 points)**

Le tableau ci-dessous, extrait d'une feuille de calcul, donne les indices de référence des loyers, notés IRL, au dernier trimestre de chaque année depuis 2009 (base 100 pour l'année 1998) et leurs évolutions annuelles.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Année	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
2	Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7
3	Indice de référence des loyers y_i	117,47	119,17	121,68	123,97	124,83	125,29	125,28
4	Taux d'évolution de l'IRL (arrondi à 0,01 %)		1,45					

Source : INSEE

Partie A

1. La cellule C4 est au format pourcentage arrondi à 0,01 %. Quelle formule peut-on entrer dans cette cellule pour obtenir, par recopie sur la droite, l'ensemble des valeurs de la plage de cellules C4 : H4 ?

   Solution : « =(C3 - C2) ÷ C2 »

2. La loi française dispose que pour une révision annuelle d'un loyer, le taux d'évolution du loyer ne peut être supérieur à celui de l'IRL de l'année écoulée. Par exemple, un propriétaire ne peut augmenter le loyer de 2010 de plus de 1,45 % en janvier 2011. Un propriétaire propose un loyer de 650 € mensuel au dernier trimestre 2010 et souhaite le réviser et le passer à 658 € mensuel pour l'année 2011. Est-il en accord avec la loi ?
   Justifier la réponse.

   Solution : L'évolution entre 650 et 658 est de $\dfrac{658-650}{650} \times 100 \approx 1{,}23\,\%$
   Donc le propriétaire est en accord avec la loi.

3. **a.** Déterminer le taux d'évolution arrondi à 0,01 % de l'IRL entre le dernier trimestre 2009 et le dernier trimestre 2015.

   Solution : Le taux d'évolution entre 2009 et 2015 est $\dfrac{125{,}28-117{,}47}{117{,}47} \times 100 \approx 6{,}6\,\%$

   b. En déduire le taux d'évolution annuel moyen arrondi à 0,01 % de l'IRL entre le dernier trimestre 2009 et le dernier trimestre 2015.

   Solution : Le coefficient multiplicateur associé à une hausse de 6,6 % est $C = 1{,}066$. Soit c le coefficient multiplicateur annuel moyen, on a alors $c^6 = C$ car il y a 6 années entre 2009 et 2015
   $c^6 = C \Longleftrightarrow c = C^{\frac{1}{6}} \approx 1{,}011$ ce qui correspond à une hausse de 1,1 %
   Le taux annuel moyen entre 2009 et 2015 est donc une hausse d'environ 1,1 %.

Partie B

1. À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients seront arrondis au millième.

   Solution : D'après la calculatrice, la droite d'ajustement de y en x est d'équation $y = 1{,}386x + 116{,}981$

   Dans la suite de l'exercice on décide de prendre comme droite d'ajustement de y en x la droite D d'équation $y = 1{,}39x + 117$.

2. **a.** À l'aide de cet ajustement, donner une estimation de l'IRL au dernier trimestre 2017 puis au dernier trimestre 2018.

   Solution : Le dernier trimestre 2017 est de rang 9 et en remplaçant x par 9 dans l'équation $y = 1{,}39x + 117$, on obtient $y = 129{,}51$

   Donc à l'aide de cet ajustement, on peut estimer qu'au dernier trimestre l'IRL sera d'environ 129,51

   De la même manière on obtient un IRL d'environ 130,9 au dernier trimestre 2018

   b. Le loyer mensuel d'un appartement s'élève à 850 € au dernier trimestre de l'année 2018. Si le propriétaire envisage à cette période une révision de ce loyer, quelle somme maximale, arrondie à l'euro, peut-il exiger de son locataire pour janvier 2019 ?

   Solution : Le taux d'évolution de l'IRL sur l'année 2018 a été de
   $\dfrac{130{,}9 - 129{,}51}{129{,}51} \times 100 \approx 1{,}07\%$
   Le loyer maximal que peut donc réclamer le propriétaire est
   $850 \times 1{,}0107 \approx 859$ €

EXERCICE 3 **6 points**

Une étude menée en 2010 par l'institut national de prévention et d'éducation à la santé évalue le comportement face au tabac en fonction de l'âge d'initiation.
Cette étude menée auprès d'un panel de personnes âgées de 20 ans à 25 ans et ayant déjà testé la cigarette présente les conclusions suivantes :

— la probabilité de devenir un fumeur régulier est de 0,65 si la première cigarette a été fumée avant l'âge de 14 ans ;

— cette probabilité est de 0,52 si la première cigarette a été fumée entre 14 ans et 17 ans ;

— cette probabilité est enfin de 0,32 si la première cigarette a été fumée après l'âge de 17 ans.

On interroge 500 personnes, choisies au hasard, âgées de 20 à 25 ans ayant déjà fumé. Le tableau ci-dessous donne la répartition des personnes interrogées selon l'âge qu'elles avaient lors de la consommation de leur première cigarette.

Âge	Avant 14 ans	Entre 14 ans et 17 ans	Après 17 ans
Pourcentage des personnes interrogées	28 %	57 %	15 %

On choisit une personne au hasard parmi les 500 interrogées.
Dans la suite de l'exercice, on note :

— F l'évènement « la personne choisie est un fumeur régulier »

— A l'évènement « la personne choisie a fumé sa première cigarette avant l'âge de 14 ans » ;

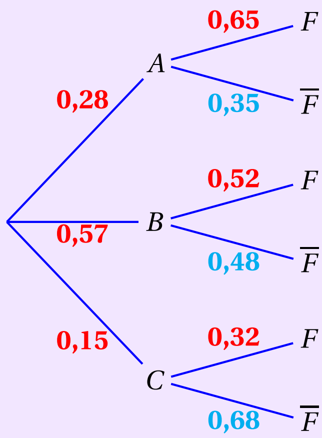
— B l'évènement « la personne choisie a fumé sa première cigarette entre 14 ans et 17 ans » ;

— C l'évènement « la personne choisie a fumé sa première cigarette après l'âge de 17 ans ».

Pour tout évènement A, on notera $p(A)$ sa probabilité, $\overline{A}$ son évènement contraire, et, pour tout évènement B de probabilité non nulle, $P_B(A)$ la probabilité de l'évènement A sachant que B est réalisé.

1. En considérant encore valables les conclusions de l'étude menée en 2010, recopier puis compléter l'arbre pondéré suivant.

Solution : L'énoncé donne :
$p(A) = 0{,}28$, $p(B) = 0{,}57$, $p(C) = 0{,}15$, $p_A(F) = 0{,}65$, $p_B(F) = 0{,}52$ et $p_C(F) = 0{,}32$
On obtient toutes les autres valeurs (en vert) par soustraction



2. Quelle est la probabilité que la personne choisie ait fumé avant l'âge de 14 ans et soit un fumeur régulier?

Solution : On cherche $p(A \cap F)$
$p(A \cap F) = p(A) \times p_A(F) = 0{,}28 \times 0{,}65 = 0{,}182$

3. Montrer que $p(F) = 0{,}5264$.

Solution : A , B et C forment une partition de l'univers donc d'après les probabilités totales on a

$$\begin{aligned} p(F) &= p(A \cap F) + p(B \cap F) + p(C \cap F) \\ &= 0{,}182 + p(B) \times p_B(F) + p(C) \times p_C(F) \\ &= 0{,}182 + 0{,}2964 + 0{,}048 \\ &= 0{,}5264 \end{aligned}$$

4. Sachant que la personne choisie est un fumeur régulier, quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-4}, qu'il ait fumé sa première cigarette avant l'âge de 14 ans?

Solution : On cherche $p_F(A)$
$p_F(A) = \dfrac{F \cap A}{p(F)} = \dfrac{0{,}182}{0{,}5264} \approx 0{,}3457$

5. L'échantillon étudié compte 294 fumeurs réguliers. À l'aide du résultat de la question **3.** et d'un intervalle de fluctuation au seuil de 95 %, peut-on considérer que le nombre de fumeurs réguliers de cet échantillon est anormalement élevé?

Solution : La taille de l'échantillon est $n = 500$, la proportion de fumeurs réguliers est $p = p(F) = 0{,}5264$
L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est $I = \left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$

or $p+\dfrac{1}{\sqrt{n}} \approx 0{,}571$ et la fréquence observé du fumeurs réguliers sur l'échantillon est $f=\dfrac{294}{500}=0{,}588$

On remarque que $f \notin I$ donc on peut considérer que le nombre de fumeurs réguliers de cet échantillon est anormalement élevé

EXERCICE 4 **4 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM). Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier sur la copie la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

Les justifications fournies ici n'étaient pas demandées, elles ne sont données qu'à titre informatif

Un apiculteur constate qu'entre le 1er mars 2014 et le 1er mars 2016, la population d'abeilles adultes de sa ruche a diminué de 15 % par an.

1. Au 1er mars 2016 l'apiculteur dénombre 55 200 abeilles adultes dans sa ruche, à combien peut-on estimer le nombre d'abeilles adultes, arrondi à la centaine, qui peuplaient la ruche au 1er mars 2014 ?

   a. 73 000 **b.** 107 100 **c.** 76 400 **d.** 71 800

Solution : Le coefficient multiplicateur associé à une baisse de 15 % est $c = 0,85$
pour trouver le nombre d'abeilles en 2014 il faut donc diviser par c^2 car il s'est écoulé 2 ans. $\dfrac{55\,200}{0,85^2} \approx 76\,400$

L'apiculteur fait l'hypothèse que cette baisse régulière de 15 % va se poursuivre dans les années à venir. Pour pallier cette perte, il décide d'introduire 15 000 abeilles adultes supplémentaires dans sa ruche au 1er mars de chaque année à partir de 2017.

2. Avec cette hypothèse, combien d'abeilles adultes, à la centaine près, peupleront la ruche au 1er mars 2018 après l'apport de l'apiculteur ?

   a. 67 600 **b.** 70 000 **c.** 72 400 **d.** 63 500

Solution : Au 1er mars 2017, le nombre d'abeilles a baissé de 15 % donc il y en a $55\,200 \times 0,85 = 46\,920$ puis l'apiculteur en ajoute 15 000 donc suite à l'ajout du 1er mars 2017, il y en a 61 920.
Au 1er mars 2018, après l'ajout, il y aura $61\,920 \times 0,85 + 15\,000 = 67\,632 \approx 67\,000$.

L'apiculteur décide de poursuivre cet apport annuel de 15 000 abeilles adultes jusqu'à ce que la population de sa ruche atteigne 80 000 abeilles adultes.

3. Lequel de ces quatre algorithmes permet de déterminer le nombre d'années (à partir de 2016) nécessaires pour atteindre cet objectif ?

a.

Variables
a est un nombre réel
n est un nombre entier
Traitement
a prend la valeur 55 200
n prend la valeur 0
Tant que $n > 80000$
  a prend la valeur $a \times 0,85 + 15000$
  n prend la valeur $n + 1$
Fin Tant que
Afficher n

b.

Variables
a est un nombre réel
n est un nombre entier
Traitement
n prend la valeur 0
Tant que $a < 80000$
  a prend la valeur 55 200
  a prend la valeur $a \times 0,85 + 15000$
  n prend la valeur $n + 1$
Fin Tant que
Afficher n

c.

Variables
a est un nombre réel
n est un nombre entier
Traitement
n prend la valeur 0
a prend la valeur 55 200
Tant que $a < 80000$
  a prend la valeur $a \times 0,85 + 15000$
  n prend la valeur $n + 1$
Fin Tant que
Afficher a

d.

Variables
a est un nombre réel
n est un nombre entier

Traitement
a prend la valeur 55 200
n prend la valeur 0
Tant que $a < 80000$
  a prend la valeur $a \times 0,85 + 15000$
  n prend la valeur $n + 1$
Fin Tant que
Afficher n

Solution :

Dans l'algorithme **a.**, l'affichage donnera 0 car on ne rentre pas dans la boucle du « Tant que »puisque le test s'effectue sur la valeur de n qui n'est pas supérieure à 80 000. On peut remarquer que ce test n'a aucun sens dans le problème qui nous occuppe.

Dans l'algorithme **b.**, on ne sortira jamais de la boucle du « Tant que »puisque la valeur de a est réinitialisée au début de cette boucle. Donc la valeur calculée de a sera toujours la même : 61 920 et donc restera toujours inférieur à 80 000.

Dans l'algorithme **c.**, la boucle du « Tant que »est tout à fait correcte mais l'algorithme affiche en sortie le nombre d'abeilles a et non le nombre d'années.

Finalement le seul algorithme qui convient est le **d.**

4. On admet que la production moyenne de miel d'une ruche, en kilogramme, est une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne $\mu = 15$ et d'écart type $\sigma = 5$.
La probabilité $p(5 \leqslant X \leqslant 25)$ arrondie à 0,01 est égale à :

a. 0,68 **b.** 0,99 **c.** 0,95 **d.** 0,50

Solution : Deux méthodes

1re méthode : si on connait la propriété $p(\mu-2\sigma \leqslant X \leqslant \mu+2\sigma) \approx 0,95$ car $\mu-2\sigma = 5$ et $\mu+2\sigma = 25$

2e méthode : à la calculatrice $p(5 \leqslant X \leqslant 25) \approx 0,954$