∽ Corrigé du baccalauréat STMG Centres étrangers ∾
11 juin 2015

La calculatrice (conforme à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999) est autorisée.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il sera tenu compte de la clarté des raisonnements et de la qualité de la rédaction dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 **4 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).

Pour chaque question, quatre réponses sont proposées, une seule réponse est correcte.

Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier sur la copie la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée. Chaque réponse correcte rapporte un point.

Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

1. Un laboratoire pharmaceutique fabrique des gélules contenant une substance S. La masse de substance S, exprimée en milligrammes (mg), contenue dans une gélule est modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $8,2$ et d'écart type $0,05$.

La norme de fabrication impose que la masse de substance S dans une gélule soit comprise entre 8,1 mg et 8,3 mg. La probabilité qu'une gélule soit hors norme après la fabrication est :

a. ~~0,2~~ **b.** $\boxed{0{,}05}$ **c.** ~~0,8~~ **d.** ~~0,95~~

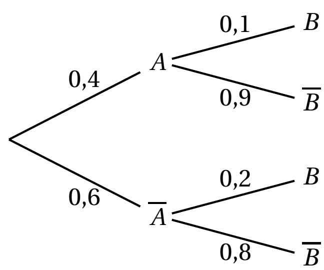
2. Un maire souhaite estimer la proportion d'habitants de sa commune satisfaits des décisions qu'il a prises depuis son élection. Un récent sondage effectué sur 800 habitants montre que 560 personnes sont satisfaites.

Un intervalle de confiance au niveau de confiance 95 % pour la proportion d'opinions favorables est :

a. $\boxed{[0{,}66\,;\,0{,}74]}$ **b.** ~~[0,69 ; 0,71]~~ **c.** ~~[0,60 ; 0,80]~~ **d.** ~~[0,71 ; 0,79]~~

3. L'arbre de probabilités ci-dessous représente une situation où A et B sont deux évènements. Les évènements contraires de A et de B sont respectivement notés $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

Pour tout évènement E, on note $p(E)$ la probabilité de E et pour tout évènement F de probabilité non nulle, on note $p_F(E)$ la probabilité conditionnelle de E sachant F.



3. 1. $p(B)$ est égale à :

a. ~~0,3~~ **b.** ~~0,0048~~ **c.** ~~0,12~~ **d.** $\boxed{0{,}16}$

3. 1. $p_B(A)$ est égale à :

a. $\boxed{0{,}25}$ **b.** ~~0,4~~ **c.** ~~0,04~~ **d.** ~~0,1~~

EXERCICE 2 **5 points**

On a relevé le nombre d'oiseaux d'une espèce particulière, les limicoles, séjournant sur l'île de Ré.
Les résultats figurent dans le tableau fourni en annexe.

1. **a.** Le tableau est complété sur l'annexe. Puisque les taux d'évolution sont arrondis à 1 %, nous pouvons dire qu'ils sont égaux.

   b. On suppose que l'évolution du nombre d'oiseaux se poursuit de la même façon après 2014. Un seuil d'alerte est déclenché si le nombre d'oiseaux passe en dessous de 100.

   Selon cette hypothèse, l'alerte sera déclenchée avant 2020. Puisque le taux d'évolution annuel est de $-10\,\%$, le coefficient multiplicateur associé est 0,9. Par conséquent le nombre de limicoles de l'année précédente est multiplié par 0,9. Pour $n = 4$ c'est-à-dire en 2018 nous aurions $164 \times (0,9)^4$ soit environ 108 oiseaux. Pour $n = 5$ c'est-à-dire en 2019 nous aurions $164 \times (0,9)^5$ soit environ 97 oiseaux.

2. Au début de l'année 2014, des scientifiques mettent en place des mesures de protection des oiseaux et d'aménagement du territoire, ce qui a pour effet de limiter la diminution des effectifs de limicoles à 6 % par an. Par ailleurs, la région décide de réintroduire 20 nouveaux oiseaux de cette espèce le premier janvier de chaque année, à partir de 2015.

   a. Nous pouvons estimer le nombre de limicoles au premier janvier 2015 à 174 car $0,94 \times 164 + 20 \approx 174,16$.

   b. On utilise un tableur pour estimer la population de limicoles séjournant sur l'île de Ré à partir de 2014. On donne ci-dessous une copie d'écran d'une partie du tableau utilisé. Les cellules sont au format « nombre sans décimale ».

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Année	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
2	Effectif	164	174	184	193	201	209	217

   Une formule que nous pouvons entrer dans la cellule C2 pour obtenir, par recopie vers la droite, les autres valeurs de la ligne 2 est : =B$2 *0,94+20.

   c. Les mesures prises par les scientifiques semblent adaptées à la survie de cette espèce sur l'île de Ré puisque le nombre de limicoles augmenterait chaque année à partir 2015.

EXERCICE 3 **6 points**

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de l'indice du nombre annuel d'immatriculations de voitures neuves équipées d'un moteur diesel de 2001 à 2011, base 100 en 2001.

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Indice y_i	100	106,8	106,8	109,9	112,7	112,6	120,3	124,9	126,0	122,7	122,9

Source : d'après INSEE

Le nuage des points de coordonnées $\left(x_i\,;\,y_i\right)$ pour i variant de 0 à 10 est donné en annexe, à rendre avec la copie.

1. **a.** Déterminons, à l'aide du tableau, le taux d'évolution du nombre d'immatriculations de voitures neuves équipées d'un moteur diesel entre 2001 et 2011 exprimé en pourcentage.

   Le taux d'évolution t est défini par $t = \dfrac{\text{indice final} - 100}{100}$. $t = \dfrac{122,9 - 100}{100} \approx 0,229$.
   Le taux d'évolution du nombre d'immatriculations de voitures neuves équipées d'un moteur diesel entre 2001 et 2011 est de 22,9 %.

b. On sait que 1 268 milliers de voitures neuves équipées d'un moteur diesel ont été immatriculées en 2001. Calculons le nombre de voitures de ce type immatriculées en 2011.

Sachant que le coefficient multiplicateur entre 2001 et 2011 est 1,229, le nombre de voitures de ce type est en milliers $1268 \times 1,229 \approx 1558,372$.

Le nombre de voitures de ce type immatriculées en 2011 est d'environ 1 558,4 milliers.

2. Calculons le taux d'évolution moyen annuel entre 2009 et 2011, exprimé en pourcentage et arrondi à 0,01 %.

Le coefficient multiplicateur global entre 2009 et 2011 est $\dfrac{122,9}{126,0} \approx 0,9754$.

En appelant t_m le taux moyen, le coefficient multiplicateur global est aussi $(1+t_m)^2$ puisque le nombre d'immatriculation a subi 2 évolutions durant cette période.

$(1+t_m)^2 = 0,9754$ par conséquent $t_m = \sqrt{0,9754} - 1 \approx -0,0124$.

Le taux moyen annuel entre 2009 et 2011 est d'environ $-1,24$ %.

3. **a.** À l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés est $y = 2,48x + 102,63$. *Les coefficients sont arrondis au centième.*

b. On décide d'ajuster ce nuage de points par la droite D d'équation $y = 2,5x + 102,6$.

Cette droite est tracée sur le graphique figurant en annexe.

c. À l'aide de ce modèle, estimons les indices du nombre de voitures neuves équipées d'un moteur diesel immatriculées en 2012 et en 2013.

en 2012 le rang de l'année est 11. Par conséquent en remplaçant x par 11 dans l'équation de la droite de régression, nous obtenons $y = 2,5 \times 11 + 102,6 = 130,1$.

en 2013 le rang de l'année est 12. Par conséquent en remplaçant x par 12 dans l'équation de la droite de régression, nous obtenons $y = 2,5 \times 12 + 102,6 = 132,6$.

4. Le tableau ci-dessous donne le nombre d'immatriculations de voitures neuves (exprimé en milliers) équipées d'un moteur diesel de 2009 à 2013.

Année	2009	2010	2011	2012	2013
Nombre d'immatriculations (en milliers)	1 597,7	1 555,4	1 558,2	1 354,9	1 182,2
Indice y_i, base 100 en 2001	126,0	122,7	122,9		

a. En déterminant l'indice de 2012 et celui de 2013, nous pouvons remettre en question l'estimation faite à la question 3. c.

En 2012 nous avons $\dfrac{1354,9}{1558,2} = \dfrac{I_{2012}}{122,9}$ d'où $I_{2012} = \dfrac{1354,9 \times 122,9}{1558,2} \approx 107$.

en 2013 nous avons $\dfrac{1182,2}{1558,2} = \dfrac{I_{2013}}{122,9}$ d'où $I_{2013} = \dfrac{1182,2 \times 122,9}{1558,2} \approx 93$.

b. Si la tendance observée sur le tableau entre 2011 et 2013 se poursuit, déterminons le nombre de voitures neuves équipées d'un moteur diesel qui devraient être immatriculées en 2015.

Entre 2011 et 2013 c'est-à-dire pendant une période de deux ans, le nombre de voitures a été multiplié par $\dfrac{1182,2}{1558,2} \approx 0,7587$. Entre 2013 et 2015, la période est aussi de deux ans, nous avons donc en 2015 le nombre de voitures de 2013 multiplié par 0,758 7. $1182,2 \times 0,7587 \approx 897,94$.

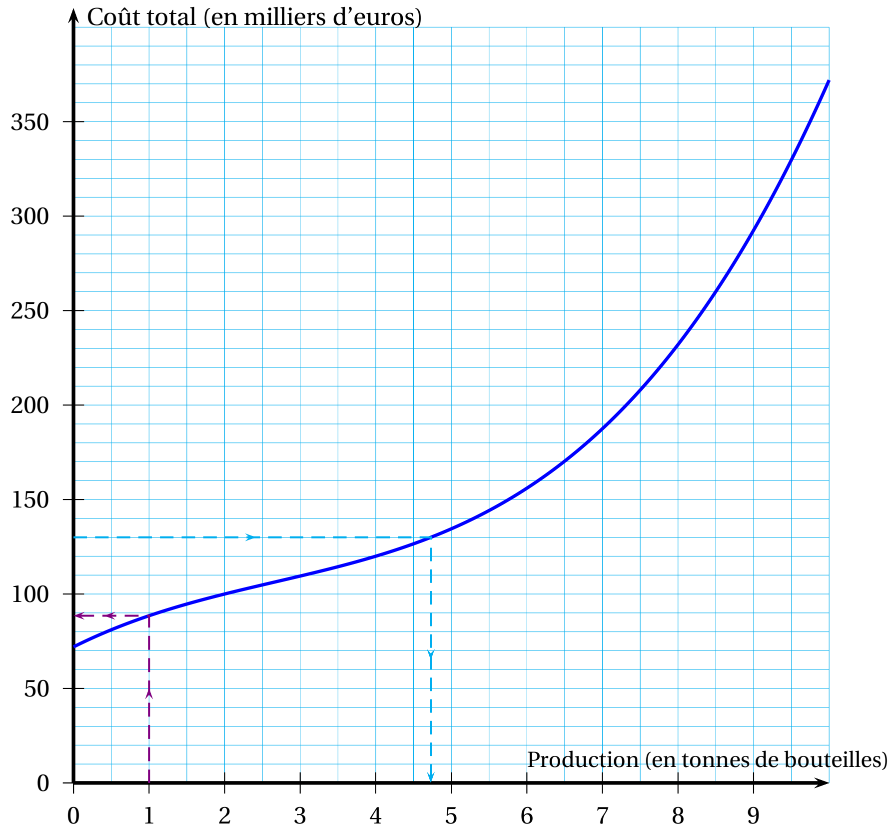
Si la tendance observée sur le tableau entre 2011 et 2013 se poursuit, le nombre de voitures neuves équipées d'un moteur diesel qui devraient être immatriculées en 2015 est d'environ 897,94 milliers.

EXERCICE 4 **5 points**

Une entreprise fabrique des bouteilles en verre. La production quotidienne, exprimée en tonnes, varie entre 0 et 10.
Pour l'entreprise, le coût correspondant à la fabrication de x tonnes de bouteilles, exprimé en milliers d'euros, est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ 10]$ par :

$$f(x) = 0,5x^3 - 4x^2 + 20x + 72.$$

On a représenté ci-dessous la fonction f dans un repère orthogonal du plan.



Partie A

1. Avec la précision permise par le graphique, le coût correspondant à la fabrication d'une tonne de bouteilles est de 90 milliers d'euros. Nous lisons l'ordonnée du point d'abscisse 1 appartenant à la courbe.

2. Avec la précision permise par le graphique, la production de bouteilles correspondant à un coût de fabrication de 130 milliers d'euros est de 4,7 tonnes de bouteilles. Nous lisons l'abscisse du point d'ordonnée 130 appartenant à la courbe.

Partie B

On appelle coût moyen la fonction C_M définie sur l'intervalle $]0\ ;\ 10]$ par :

$$C_M(x) = \frac{f(x)}{x}.$$

1. Calculons la dérivée de la fonction C_M, notée C'_M.

   Exprimons d'abord C_M. $C_M(x) = \dfrac{0,5x^3 - 4x^2 + 20x + 72}{x} = 0,5x^2 - 4x + 20 + \dfrac{72}{x}$.

   $C'_M(x) = 0,5(2x) - 4 - \dfrac{72}{x^2} = x - 4 - \dfrac{72}{x^2} = \dfrac{x^3 - 4x^2 - 72}{x^2}$.

2. Montrons que pour tout x de l'intervalle $]0\,;\,10]$, $C'_M(x)$ peut s'écrire : $C'_M(x) = \dfrac{(x-6)\left(x^2+2x+12\right)}{x^2}$.

   Pour ce faire, montrons que $x^3-4x-72=(x-6)(x^2+2x+12)$. Développons $(x-6)(x^2+2x+12)$.

   $(x-6)(x^2+2x+12) = x^3+2x^2+12x-6x^2-12x-72 = x^3-4x^2-72$.

   Par conséquent sur l'intervalle $]0\,;\,10]$, $C'_M(x) = \dfrac{(x-6)\left(x^2+2x+12\right)}{x^2}$.

3. $C'_M(x)$ est du signe de $x-6$ pour x variant dans l'intervalle $]0\,;\,10]$ puisque pour tout $x \in]0\,;\,10]$

   $x^2+2x+12>0$ comme somme de termes strictement positifs.

   Sur $\mathbb{R}$, $x-6>0$ si et seulement si $x>6$. Il en résulte que sur $]0\,;\,6[$, $C'_M(x)<0$ et sur $]6\,;\,10]$, $C'_M(x)>0$

   Si pour tout $x \in I$, $f'(x)<0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

   Pour $x \in]0\,;\,6[$, $C'_M(x)<0$, par conséquent C_M est strictement décroissante sur cet intervalle.

   Si pour tout $x \in I$, $f'(x)>0$ alors f est strictement croissante sur I.

   Pour $x \in]6\,;\,10]$, $C'_M(x)>0$ par conséquent C_M est strictement croissante sur cet intervalle.

   Dressons le tableau de variation de C_M sur $]0\,;\,10]$.

x	0		6		10
$C'_M(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de C_M	$+\infty$	$\searrow$	26	$\nearrow$	37,2

4. La production de bouteilles correspondant à un coût moyen minimal est de 6 tonnes.

Partie C

L'entreprise vend ses bouteilles de verre au prix de 40 milliers d'euros la tonne, par conséquent la recette $R(x)$ est définie par $R(x)=40x$.

1. On note B la fonction bénéfice, exprimée en milliers d'euros. Calculons $B(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,10]$:

   $B(x)=R(x)-C_M(x)=40x-(0,5x^3-4x^2+20x+72)=-0,5x^3+4x^2+20x-72$.

2. Le bénéfice associé à une production de 6,5 tonnes est $B(6,5)$.

   $B(6,5)=-0,5\times(6,5)^3+4\times(6,5)^2+20\times6,5-72=89,6875$.

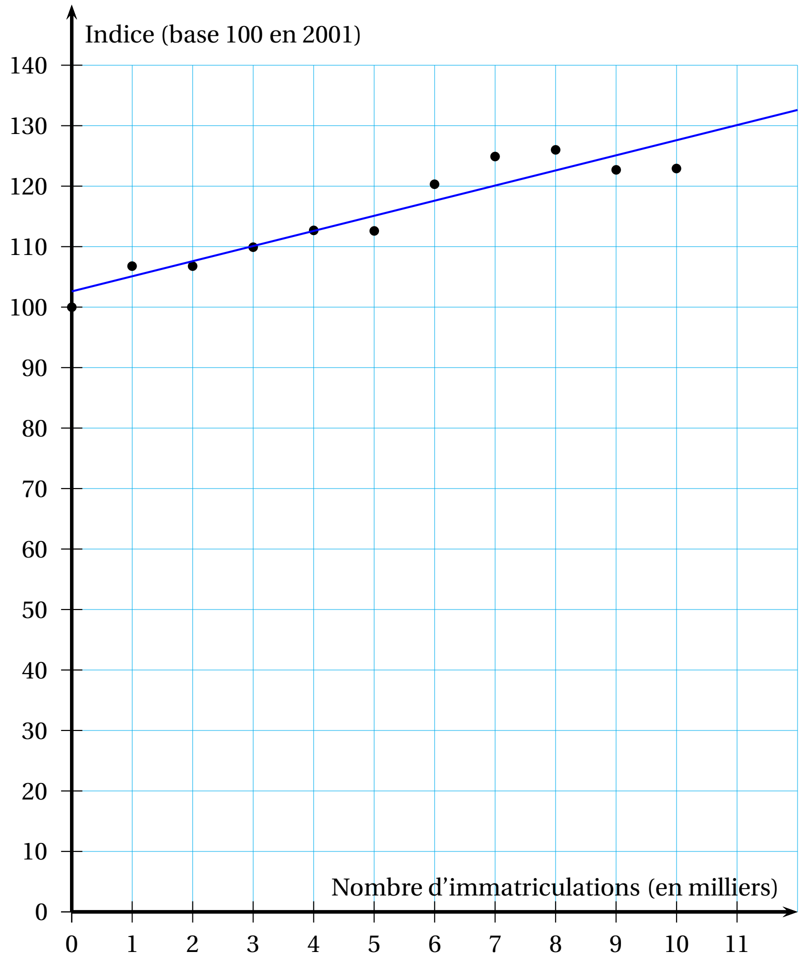
3. L'affirmation « le bénéfice est maximal lorsque le coût moyen est minimal » est fausse car le bénéfice réalisé lorsque le coût est minimal est $B(6)=84$. Il est donc inférieur à celui réalisé pour une fabrication de 6,5 tonnes.

Annexe à rendre avec la copie

Exercice 2

Année	Effectif	Taux d'évolution annuel
2010	250	
2011	225	$-10\,\%$
2012	202	$-10\,\%$
2013	182	$-10\,\%$
2014	164	$-10\,\%$

Annexe Exercice 3



Si vous photocopiez ce corrigé pensez à en créditer l'**A. P. M. E. P.**, merci.