# Corrigé du baccalauréat STMG Métropole–La Réunion 7 septembre 2015

**Durée : 3 heures**

La calculatrice (conforme à la circulaire N°99-186 du 16-11-99) est autorisée.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il sera tenu compte de la clarté des raisonnements et de la qualité de la rédaction dans l'appréciation des copies.

## EXERCICE 1 — 5 points

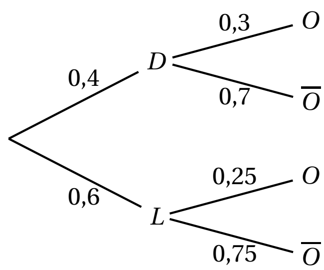
Cet exercice est composé de deux parties indépendantes l'une de l'autre.

### Partie A

Un conservatoire de musique propose deux parcours à ses élèves : un parcours diplômant et un parcours loisir. On observe que 40 % des élèves choisissent le parcours diplômant. Parmi ceux qui ont sélectionné le parcours diplômant, 30 % choisissent de faire partie d'un orchestre. Parmi les élèves ayant choisi le parcours loisir, 25 % choisissent de faire partie d'un orchestre.
On sélectionne un élève de ce conservatoire au hasard.
On note :

- $D$ l'évènement : « L'élève sélectionné a choisi le parcours diplômant. »
- $L$ l'évènement : « L'élève sélectionné a choisi le parcours loisir. »
- $O$ l'évènement : « L'élève sélectionné a choisi de faire partie d'un orchestre. »

**1.** Complétons l'arbre de probabilité suivant :




**2.** $D \cap O$ est l'événement : « l'élève sélectionné a choisi le parcours diplômant et de faire partie d'un orchestre ». $p(D \cap O) = p(D) \times p_D(O) = 0{,}4 \times 0{,}3 = 0{,}12$.

**3.** Déterminons la probabilité de l'évènement $O$.

$p(O) = p(D) \times p_D(O) + p(L) \times p_L(O) = 0{,}12 + 0{,}6 \times 0{,}25 = 0{,}27$.

**4.** On choisit au hasard un élève faisant partie d'un orchestre. La probabilité qu'il suive un parcours diplômant est notée $p_O(D)$.

$p_O(D) = \dfrac{p(D \cap O)}{p(O)} = \dfrac{0{,}12}{0{,}27} = 0{,}444$, *arrondie au millième.*

### Partie B

Pour le concert de fin d'année, l'auditorium du conservatoire dispose de 400 places réservées aux parents d'élèves. On s'intéresse au nombre $X$ de parents d'élèves assistant au concert de fin d'année dans l'auditorium.
On estime à $0,75$ la probabilité que chacun des 500 parents d'élèves assiste au concert. On admet que $X$ suit la loi binomiale de paramètres 500 et $0,75$.

1. $X$ suivant une loi binomiale de paramètres $(n, p)$ où $n = 500$ et $p = 0{,}75$, l'espérance de $X$ est $np$.

   $E(X) = 500 \times 0{,}75 = 375$.

2. Déterminons la probabilité que le nombre de places réservées aux parents d'élèves soit suffisant.

   Pour que le nombre de places soit suffisant, il suffit qu'au plus 400 parents viennent.

   $p(X \leqslant 400) = 0{,}996$ *arrondie au millième*.

## EXERCICE 2 — 4 points

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chaque question, quatre réponses sont proposées et une seule est correcte.*
*Relever sur votre copie le numéro de la question ainsi que la réponse choisie.*
*Aucune justification n'est attendue.*
*Une réponse correcte rapporte un point; une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

Entre 2004 et 2014, le SMIC (Salaire Minimum Interprofessionnel de Croissance) mensuel brut est passé de 1154 € à 1445 €.

1. Selon une étude, le loyer moyen d'un studio en 2014 à Bordeaux est de 470 €. Quel pourcentage du SMIC (arrondi à 0,1 %) cela représente-t-il ?

   **a.** ~~40,7 %~~ **b.** ~~4,7 %~~ **c.** $\boxed{32{,}5\,\%}$ **d.** ~~3,07 %~~

2. Quel est le taux d'évolution du SMIC (arrondi à 0,1 %) entre 2004 et 2014 ?

   **a.** ~~18,8 %~~ **b.** ~~2,91 %~~ **c.** ~~20,1 %~~ **d.** $\boxed{25{,}2\,\%}$

3. Quel est le taux d'évolution annuel moyen du SMIC (arrondi à 0,1 %) entre 2004 et 2014 ?

   **a.** $\boxed{2{,}3\,\%}$ **b.** ~~25,2 %~~ **c.** ~~1,4 %~~ **d.** ~~2,5 %~~

4. Entre 2013 et 2014, le SMIC a augmenté d'environ 1 %. En supposant que cette évolution annuelle se poursuive dans les cinq prochaines années, quelle serait la valeur du SMIC mensuel brut en 2019 (arrondie à l'euro) ?

   **a.** ~~1 517 €~~ **b.** ~~1 450 €~~ **c.** ~~2 327 €~~ **d.** $\boxed{1\,519\text{ €}}$

## EXERCICE 3 — 5 points

Après une décision collective, les copropriétaires d'un immeuble votent la réalisation de travaux sur la façade du bâtiment.

### Partie A : la facture

Complétons la facture suivante, reçue par la copropriétaire Madame M.
À une augmentation de 10 % correspond un coefficient multiplicateur de 1,1

$5\,002 \times 1{,}1 = 5\,502{,}2$ $\qquad 9\,152 - 5\,502{,}2 = 3\,649{,}8$ $\qquad \dfrac{3\,649{,}8}{1{,}1} = 3\,318$

| **Prestations** | Prix hors taxe | Prix T.V.A. incluse* |
|---|---|---|
| - Travaux sur la façade | 5 002 € | 5 502,2 € |
| - Autres prestations | 3 318 € | 3 649,8 € |
| **Total** | 8 320 € | Total : 9 152 € |

* La valeur de la T.V.A. sur ce type de travaux est de 10 %

**Partie B : l'épargne de Madame M.**

Madame M. dépose le 1er juin 2015 un capital de 5 000 €, sur un compte non rémunéré. À partir du 1er juillet 2015, elle versera sur ce compte un montant égal à 2,5 % du capital du mois précédent.
Ceci conduit à modéliser la valeur du capital $n$ mois après le 1er juin 2015 par le terme $v_n$ d'une suite géométrique.

1. Le premier terme est $v_0 = 5000$ et la raison de la suite $(v_n)$ est 1,025.
2. Pour tout entier naturel $n$, exprimons $v_n$ en fonction de $n$. Le terme général d'une suite géométrique de premier terme $u_0$ et de raison $q$ est $u_n = u_0 \times (q)^n$.

   $v_n = 5000 \times (1{,}025)^n$
3. Le capital constitué le 1er juin 2017 ne sera pas suffisant pour payer à cette date la facture des travaux. En effet entre le 1er juillet 2015 et le 1er juin 2017 inclus, il y aura eu 24 versements.

   $v_{24} = 5000 \times (1{,}025^{24}) \approx 9043{,}63$.

   Il lui manque un peu plus de cent euros.

**EXERCICE 4** **6 points**

Un restaurateur ne sert au déjeuner que des plats du jour. Il cherche à estimer l'effet du prix de ce plat sur le nombre de ses clients à partir du tableau suivant :

| Prix du plat du jour en euros $x$ | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de clients $y$ | 82 | 78 | 65 | 41 | 20 |

**Partie A : Étude statistique**

1. À l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement du nombre de clients $y$ en fonction du prix $x$ obtenue par la méthode des moindres carrés est $y = -8{,}05x + 145{,}75$.
2. Dans la suite du problème, on décide de modéliser le nombre $y$ de clients en fonction du prix $x$ par l'expression $y = -8x + 146$.

   **a.** D'après ce modèle, calculons le nombre de clients si le restaurateur fixe le prix du plat du jour à 12 €. Par conséquent $x = 12$, en remplaçant dans l'équation de la droite
   $y = -8 \times 12 + 146 = 50$. Si le prix est de 12 euros, il peut envisager 50 clients.

   **b.** D'après ce modèle, déterminons le prix du plat du jour pour lequel le restaurateur peut espérer attirer 100 clients. Pour ce faire, résolvons $-8x + 146 = 100$.
   $-8x + 146 = 100 \quad 46 = 8x \quad x = \dfrac{46}{8} = 5{,}75$.
   Si le prix est de 5,75 euros, il peut envisager 100 clients.

**Partie B : Optimisation de la recette**

Dans cette partie, on s'intéresse à la recette réalisée par ce restaurateur sur son plat du jour.

1. En utilisant les données du tableau du début de l'exercice, déterminons la recette réalisée par le restaurateur pour un prix du plat du jour fixé à 13 €. À ce prix, il a reçu 41 clients, par conséquent la recette s'élève à 533 euros,($13 \times 41 = 533$).

**2.** On note $f$ la fonction qui, au prix $x$ du plat du jour en euros, associie la recette du jour $f(x)$ en euros. On admet que $x$ appartient à l'intervalle $[6; 16]$.

**a.** En utilisant la modélisation de la question 2 de la partie A, montrons que $f(x) = -8x^2 + 146x$. Sachant que la recette est égale au prix $x$ multiplié par la quantité $-8x + 146$, nous obtenons $x(-8x+146) = -8x^2 + 146x = f(x)$.

**b.** Déterminons l'expression de $f'(x)$ où $f'$ désigne la fonction dérivée de la fonction $f$.
$f'(x) = -8(2x) + 146 = -16x + 146$.

**c.** Étudions le signe de $f'(x)$.

Sur $\mathbb{R}$, $-16x + 146 > 0 \iff -16x > -146 \iff x < \dfrac{-146}{-16} \quad x < 9{,}125$.

Il en résulte si $x \in [6\ ;\ 9{,}125\ [$, $f'(x) > 0$ et si $x \in ]9{,}125\ ;\ 16]$ $f'(x) < 0$.

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors la fonction $f$ est strictement croissante sur $I$.

Pour $x \in [6\ ;\ 9{,}125\ [$, $f'(x) > 0$ par conséquent la fonction est strictement croissante sur cet intervalle.

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction $f$ est strictement décroissante sur $I$.

Pour $x \in ]9{,}125\ ;\ 16]$ $f'(x) < 0$ par conséquent la fonction est strictement décroissante sur cet intervalle.

Dressons maintenant le tableau de variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $[6; 16]$.

| $x$ | 6 | | 9,125 | | 16 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | |
| Variation de $f$ | | | 666,125 | | |
| | 588 | ↗ | | ↘ | 288 |

**d.** D'après le tableau de variation, la fonction $f$ admet un maximum pour $x = 9{,}125$. Le prix (arrondi au dixième d'euro) pour lequel le restaurateur obtient une recette maximale est 9,1. Il sert alors 73 plats du jour dans ce cas $(-8 \times 9{,}1 + 146 = 73{,}2)$.