Corrigé du baccalauréat STMG
Métropole–La Réunion – 6 septembre 2018

Exercice 1 **3 points**

Une variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne $\mu = 80$ et d'écart type $\sigma = 10$.

1. La probabilité $p(60 \leqslant X \leqslant 100)$, arrondie au centième, est égale à :

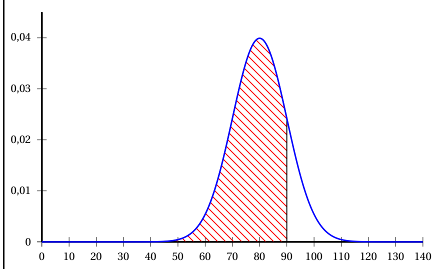
a. 0,05 **b.** 0,97
c. 0,50 **d.** $\boxed{0{,}95}$

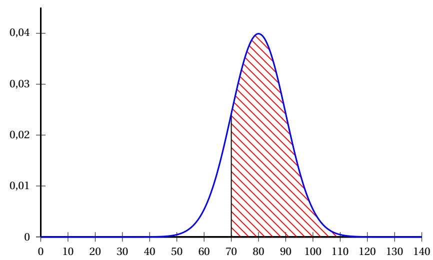
D'après le cours, si la variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ, alors $p(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$.
On peut également trouver ce résultat à la calculatrice.
Réponse d.

2. La probabilité $p(X < 90)$ est égale à :

a. $0{,}5 - p(X > 90)$ **b.** $\boxed{p(X > 70)}$
c. $1 - p(X > 70)$ **d.** $1 - p(X \geqslant 70)$

Pour des raisons de symétrie autour de la droite d'équation $x = \mu$:
$p(X < 90) = p(X < \mu + 10) = p(X > \mu - 10) = p(X > 70)$.



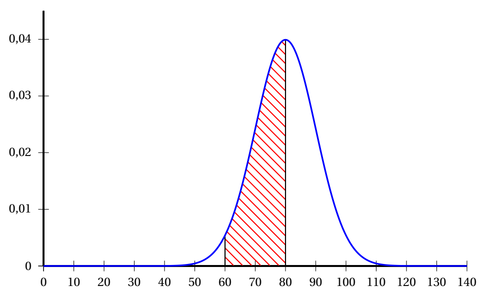


Réponse b.

3. La probabilité $p(60 \leqslant X \leqslant 80)$ est égale à :

a. $0{,}5 + p(X \geqslant 60)$ **b.** $\boxed{0{,}5 - p(X \leqslant 60)}$
c. $1 - p(X \leqslant 60)$ **d.** $0{,}5 + p(X \leqslant 60)$

$p(60 \leqslant X \leqslant 80) = p(X \leqslant 80) - p(X \leqslant 60) = p(X \leqslant \mu) - p(X \leqslant 60) = 0{,}5 - p(X \leqslant 60)$



Réponse b.

EXERCICE 2 — 6 points

Le tableau ci-dessous donne la production mondiale des énergies renouvelables de 2006 à 2015.
Cette production est exprimée en milliard de TEP (tonne équivalent-pétrole).

Année	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quantité produite (en milliard de TEP) : y_i	1,44	1,47	1,50	1,53	1,59	1,62	1,68	1,74	1,78	1,82

Source : OCDE d'après Extended world energy balances

Partie A

Le nuage de points de coordonnées $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ est représenté en annexe.

1. À l'aide de la calculatrice, on donne une équation de la droite qui réalise un ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés : $y = 0{,}044x + 1{,}375$.
2. On décide d'ajuster ce nuage de points par la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 0{,}04x + 1{,}37$.
   On trace cette droite dans le repère donné en annexe.
3. À l'aide de ce modèle, on va estimer la production mondiale des énergies renouvelables en 2020.
   L'année 2020 correspond à $n = 15$; si $x = 15$, alors $y = 0{,}04 \times 15 + 1{,}37 = 1{,}97$.
   On peut estimer la production mondiale des énergies renouvelables en 2020 à 1,97 milliard de TEP.

Partie B

1. Le taux d'évolution de la production mondiale des énergies renouvelables entre 2006 et 2015 est, en pourcentage : $\dfrac{1{,}82 - 1{,}44}{1{,}44} \times 100 \approx 26{,}39$.
2. Le coefficient multiplicateur qui fait passer de la production de 2006 à 2015 est $\dfrac{1{,}82}{1{,}44}$; cela correspond à 9 années.
   Le coefficient multi1plicateur moyen entre 2006 et 2015 est le nombre m tel que $1{,}44 \times m^9 = 1{,}82$; donc $m = \left(\dfrac{1{,}82}{1{,}44}\right)^{\frac{1}{9}} \approx 1{,}0264$ qui correspond, en pourcentage, à un taux moyen d'augmentation de 2,64.

Partie C

On décide de modéliser l'évolution de la production mondiale des énergies renouvelables à l'aide d'une suite géométrique de raison 1,026. Pour tout entier naturel n, on note u_n la production mondiale des énergies renouvelables, en milliard de TEP, pendant l'année $(2015 + n)$.
Ainsi (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1{,}82$ et de raison $q = 1{,}026$.

1. Pour tout n, $u_n = u_0 \times q^n = 1{,}82 \times 1{,}026^n$.
2. $2020 = 2015 + 5$ donc, d'après ce modèle, une estimation de la production mondiale des énergies renouvelables en 2020 est, en milliard de TEP, $u_5 = 1{,}82 \times 1{,}026^5 \approx 2{,}07$.
3. Selon l'Agence d'Information sur l'Énergie des États-Unis d'Amérique (EIA), l'approvisionnement pétrolier mondial a été, en 2016, d'environ 4,84 milliards de tonnes. On donne l'algorithme suivant :

```
U ← 1,82
K ← 0
Tant que U < 4,84
        U ← U × 1,026
        K ← K + 1
Fin Tant que
```

Après exécution de cet algorithme, la variable K contient la valeur 39.

Donc 39 est la première valeur pour laquelle U dépasse 4,84. La valeur de départ de 1,82 correspond à l'année 2015, donc c'est à partir de l'année $2015+39 = 2054$ que la production mondiale des énergies renouvelables dépassera 4,84 milliards de tonnes.

Le contenu de la variable U sera alors $u_{39} = 1{,}82 \times 1{,}026^{39} \approx 4{,}95$.

EXERCICE 3 **3 points**

En France, les agents de la fonction publique d'état (FPE) se répartissent en trois catégories (*Source : INSEE, 2010*) :

- 51 % des agents sont de catégorie A ;
- 24 % des agents sont de catégorie B ;
- 25 % des agents sont de catégorie C.

Selon le rapport annuel sur l'état de la fonction publique :

- 60 % des agents de catégorie A sont des femmes ;
- 42 % des agents de catégorie B sont des femmes ;
- 51 % des agents de catégorie C sont des femmes.

On choisit de façon équiprobable le dossier d'un agent parmi ceux de la FPE.
On considère les évènements suivants :

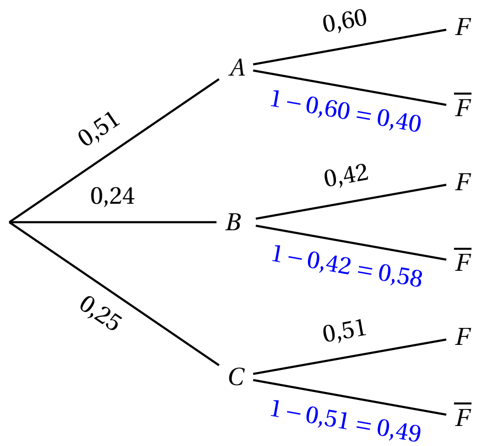
A : « le dossier est celui d'un agent de catégorie A »

B : « le dossier est celui d'un agent de catégorie B »

C : « le dossier est celui d'un agent de catégorie C »

F : « le dossier est celui d'un agent qui est une femme »

1. On complète l'arbre pondéré traduisant la situation :



2. L'évènement $A \cap F$ est « le dossier est celui d'un agent féminin de catégorie A ».
Sa probabilité est, d'après l'arbre : $p(A \cap F) = p(A) \times p_A(F) = 0{,}51 \times 0{,}6 = 0{,}306$.

3. D'après la formule des probabilités totales :
$p(F) = p(A \cap F) + p(B \cap F) + p(C \cap F) = 0{,}306 + 0{,}24 \times 0{,}42 + 0{,}25 \times 0{,}51 = 0{,}5343 \approx 0{,}53$.

4. Sachant que le dossier choisi est celui d'une femme, La probabilité qu'elle fasse partie de la catégorie A est :
$p_F(A) = \dfrac{p(A \cap F)}{p(F)} = \dfrac{0{,}306}{0{,}5343} \approx 0{,}57$.

EXERCICE 4 **8 points**

Au cours du mois d'août 2017, un parc de loisirs a vendu 16 000 billets d'entrée au prix unique de 50 euros.
On définit le chiffre d'affaires comme le produit du prix du billet d'entrée par le nombre de billets vendus. Ainsi, le chiffre d'affaires du mois d'août 2017 s'élève à 800 000 euros.
Suite à une étude de marché, on fait l'hypothèse suivante : une diminution de x% du prix du billet d'entrée par rapport à sa valeur au mois d'août 2017 (50 euros) entraîne une augmentation de $(2x)$ % du nombre d'entrées par rapport à sa valeur au mois d'août 2017 (16 000).
L'objectif de l'exercice est de calculer le pourcentage de diminution du prix du billet qui maximise le chiffre d'affaires.

Partie A : étude d'un exemple

Pour le mois d'août 2018, on envisage de diminuer le prix du billet d'entrée de 10 % par rapport à sa valeur en août 2017.

1. On retire 10% à 50 donc on multiplie par $1 - \dfrac{10}{100} = 0{,}9$ ce qui donne $50 \times 0{,}9 = 45$.
   Le prix du billet d'entrée en août 2018 est donc de 45 €.
2. Pour avoir le nombre d'entrées en août 2018, il faut augmenter de $2 \times 10 = 20$% le nombre d'entrées d'août 2017, donc multiplier par $1+\dfrac{20}{100} = 1{,}20$; on aura donc $16000\times 1{,}2 = 19200$ entrées en août 2018.
3. Le chiffre d'affaires du mois d'août 2018 serait alors de $19200 \times 45 = 864000$ €.
   .

Partie B : utilisation d'un tableur

On se propose d'étudier l'évolution du chiffre d'affaires en fonction du taux de diminution du prix du billet d'entrée par rapport à sa valeur en août 2017. Ce taux, exprimé en pourcentage, apparaît dans la première ligne du tableau donné ci-dessous, extrait d'une feuille de calcul.
Toutes les lignes du tableau sont au format *Nombre*.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Taux de diminution (en pourcentage) :	0	10	20	30	40	50	60	70
2	Prix du billet d'entrée (en euro)	50	45	40	35	30	25	20	15
3	Nombre d'entrées	16 000	19 200	22 400	25 600	28 800	32 000	35 200	38 400
4	Chiffre d'affaires (en euro)	800 000	864 000	896 000	896 000	864 000	800 000	704 000	576 000

1. Pour obtenir, par recopie vers la droite, les chiffres d'affaires de la plage C4 : I4, on saisit dans la cellule B4 la formule $\boxed{\text{= B2 * B3}}$.
2. Dans un premier temps, la cellule C2 a été complétée par la formule suivante : = B2 ∗ (1 − C1/100).
   Cette formule ne permet pas d'obtenir, par recopie vers la droite, les résultats de la plage D2 : I2 parce que le taux de diminution doit s'appliquer au prix de départ, 50 €, qui est dans la cellule B2 ; il faut donc fixer la valeur de cette cellule en rajoutant le signe $.
   La bonne formule peut être `= $B$2 * (1 - C1/100)`
3. Compte tenu des résultats donnés par le tableur, les pourcentages de diminution du prix du billet d'entrée qui maximisent le chiffre d'affaires sont 20% et 30%.

Partie C : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie, pour tout x de $[0 ; 100]$, par : $f(x) = -160x^2 + 8000x + 800000$.

1. Le signe de la dérivée f' de la fonction permet de déterminer les variations de f.
$f'(x) = -160 \times 2x + 8\,000 = -320x + 8\,000$

$f'(x) > 0 \iff -320x + 8\,000 > 0 \iff 8\,000 > 320x \iff x < \dfrac{8\,000}{320} \iff x < 25$

$f(0) = 800\,000$, $f(2() = 900\,000$ et $f(100) = 0$

On établit le tableau des variations de la fonction f :

x	0		25		100
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	800000	↗	900000	↘	0

2. Diminuer de $x\,\%$, c'est multiplier par $1 - \dfrac{x}{100}$; donc le prix par rapport à sa valeur en août 2017, est égal à $50\left(1 - \dfrac{x}{100}\right) = 50 - 0{,}5x$.

3. Augmenter de $2x\,\%$, c'est multiplier par $1 + \dfrac{2x}{100}$; le nombre d'entrées après une augmentation de $(2x)\,\%$ par rapport au nombre d'entrées en août 2017 est
$16\,000\left(1 + \dfrac{2x}{100}\right) = 16\,000 + 320x$.

4. Le chiffre d'affaires du parc de loisirs est donc

$$\begin{aligned}(50 - 0{,}5x)\,(16\,000 + 320x) &= 50 \times 16\,000 + 50 \times 320x - 0{,}5x \times 16\,000 - 0{,}5x \times 320x\\ &= 800\,000 + 16\,000x - 8\,000x - 160x^2 = -160x^2 + 8\,000x + 800\,000\\ &= f(x)\end{aligned}$$

Donc la fonction f modélise le chiffre d'affaires du parc de loisirs.

5. La fonction f a un maximum pour $x = 25$; le pourcentage de diminution du prix du billet qui maximise le chiffre d'affaires est donc 25.

6. Le chiffre d'affaires maximal est $f(25)$ soit 900 000 €.

Annexe à rendre avec la copie

Exercice 2