Corrigé du baccalauréat STMG Nouvelle-Calédonie
14 novembre 2014

EXERCICE 1 **7 points**

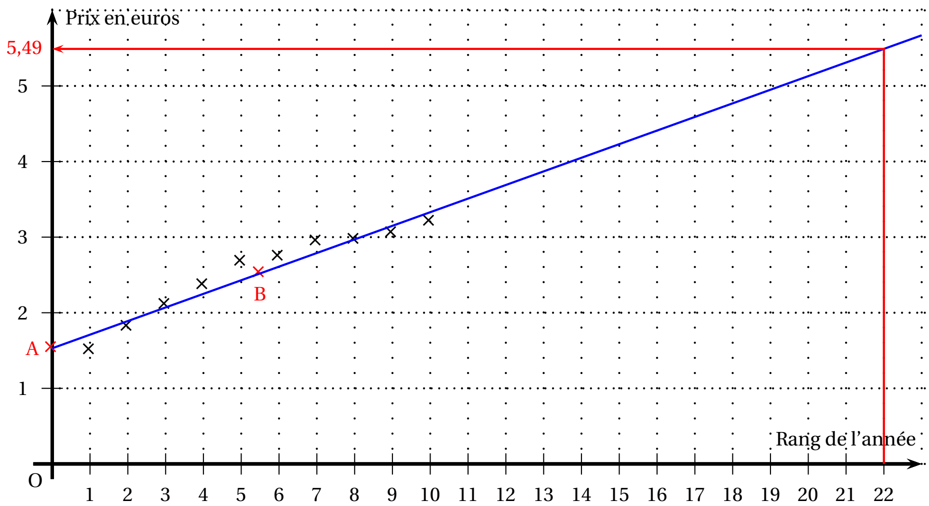
Dans cet exercice, les parties A, B et C sont indépendantes.

Le tableau suivant donne le prix moyen d'un paquet de cigarettes au 1er janvier de chaque année de 1991 à 2000. On sait de plus que, le 1er janvier 2012, le prix moyen d'un paquet de cigarettes était de 6,40 €.

Année	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Rang de l'année	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Prix en euros	1,50	1,81	2,10	2,36	2,67	2,74	2,94	2,96	3,05	3,20

Partie A

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthogonal du plan, les données du tableau sous la forme d'un nuage de points de coordonnées $(x_i\ ;\ y_i)$ pour i variant de 1 à 10.



Soient les points A de coordonnées (0; 1,53) et B de coordonnées (5,5; 2,52). On admet que la droite (AB) réalise un bon ajustement affine du nuage de points.

1. Déterminons une équation de la droite (AB).
   Étant non parallèle à l'axe des ordonnées, la droite (AB) a une équation de la forme $y = mx + p$ où $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. $m = \dfrac{2,52 - 1,53}{5,5} = 0,18$. Passant par A, $p = 1,53$
   Une équation de la droite (AB) est $y = 0,18x + 1,53$.
2. Selon ce modèle d'ajustement, le prix moyen d'un paquet de cigarettes le 1er janvier 2012 est la valeur de y pour $x = 22$. $y = 0,18 \times 22 + 1,53 = 5,49$.
   Le prix moyen d'un paquet de cigarettes le 1er janvier 2012 est de 5,49 €. Le résultat obtenu par ce modèle d'ajustement est bien éloigné de la valeur du prix moyen en 2012.
   On a tracé (ce qui n'était pas demandé) la résolution graphique de ce problème en rouge en utilisant l'ajustement affine par la droite (AB).

Partie B

1. Calculons le taux d'évolution global, en pourcentage, du prix moyen d'un paquet de cigarettes entre le 1er janvier 2000 et le 1er janvier 2012. Le taux d'évolution T est défini par $T = \dfrac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}}$; $T = \dfrac{6,40 - 3,20}{3,20} = 1$.
   Le taux d'évolution global est de 100 %.

2. Déterminons le taux d'évolution annuel moyen du prix moyen d'un paquet de cigarettes entre le 1er janvier 2000 et le 1er janvier 2012. En appelant t_m le taux moyen, le coefficient multiplicateur global est aussi $(1+t_m)^{12}$ puisque le prix moyen d'un paquet a subi 12 évolutions durant cette période.

$(1+t_m)^{12} = 2$ par conséquent $t_m = 2^{\frac{1}{12}} - 1 \approx 0{,}0594$.

Le prix moyen a augmenté chaque année en moyenne de 6 %.

Partie C

On suppose que le prix moyen d'un paquet de cigarettes augmente de 6 % par an à partir du 1er janvier 2000. On note u_n le prix moyen d'un paquet de cigarettes pour l'année $(2000+n)$.
On a donc $u_0 = 3,2$.

1. a. Calculons

$u_1 = u_0 \times \left(1 + \dfrac{6}{100}\right)$ $\quad u_1 = 3{,}2 \times 1{,}06 = 3{,}392$;

$u_2 = 3{,}392 \times 1{,}06 = 3{,}59552 \approx 3{,}596$.

b. Passant d'un terme au suivant en multipliant toujours par 1,06, coefficient multiplicateur associé à une augmentation de 6 %, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1,06 et de premier terme $u_0 = 3{,}2$.

c. Exprimons le terme général u_n en fonction de n.

Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est $u_n n = u_0 q^n$ donc ici, $u_n = 3{,}20 \times (1{,}06)^n$.

d. Selon ce modèle d'évolution, le prix moyen d'un paquet de cigarettes dépasse-t-il 5 € le 1er janvier 2005 ? Pour y répondre calculons u_5.

$u_5 = 3{,}20 \times (1{,}06)^5 \approx 4{,}28$.

En 2005, le prix moyen d'un paquet de cigarettes ne dépasse pas 5 €.

2. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est du type nombre entier
	u est du type nombre réel
	S est du type nombre réel
Entrée :	Saisir n
Début algorithme :	u prend la valeur 3,2
	S prend la valeur 3,2
	Pour n allant de 1 à 4
	Début Pour
	u prend la valeur $u \times 1,06$
	S prend la valeur $S + u$
	Fin Pour
Fin algorithme	
Sortie :	Afficher S

a. La valeur affichée par cet algorithme est 18,04.

b. L'algorithme affiche une valeur lorsqu'il s'achève. Cette valeur par rapport à la suite (u_n) est la somme de ses cinq premiers termes.

3. Paul a arrêté de fumer le 1er janvier 2011. Du 1er janvier 2000 au 31 décembre 2010, il fumait 90 paquets de cigarettes par an. Déterminons la somme d'argent qu'il aurait pu économiser s'il n'avait pas fumé durant ces années. S_{10} est la somme payée pendant 11 ans pour l'achat au prix moyen d'un paquet de cigarettes.

$S_{10} = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_9 + u_{10} = 3{,}20 \times \dfrac{1{,}06^{11} - 1}{1{,}06 - 1} \approx 47{,}91$.

Puisque sa consommation est de 90 paquets par an, le montant dépensé est $90 \times 47{,}91 = 4\,311{,}90$.

Il aurait pu économiser 4 311,90 euros.

EXERCICE 2 **4 points**

On s'intéresse au contrôle technique des véhicules de marques A et B.
En 2013, sur 571 870 véhicules contrôlés, 266 430 sont de marque A et 305 440 de marque B. Pour ces véhicules, soit le contrôle technique est conforme soit il est non conforme.
Pour 8 % des véhicules de marque A, le contrôle technique est non conforme.
Pour 6 % des véhicules de marque B, le contrôle technique est non conforme.
Pour chacun des véhicules contrôlés, une fiche a été établie.
On choisit une de ces fiches au hasard et on note :
A l'évènement : « la fiche choisie est celle d'un véhicule de la marque A »,
B l'évènement : « la fiche choisie est celle d'un véhicule de la marque B »,
C l'évènement : « la fiche choisie est celle d'un véhicule ayant un contrôle technique conforme »,
$\overline{C}$ l'évènement : « la fiche choisie est celle d'un véhicule ayant un contrôle technique non conforme ».

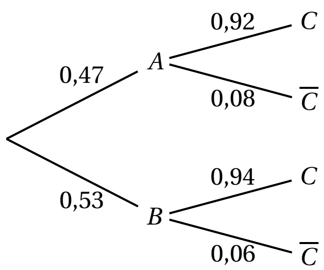
Dans cet exercice, on arrondira tous les résultats à 10^{-2} près.

1. L'univers est l'ensemble des véhicules contrôlés et la loi mise sur cet univers est l'équiprobabilité.
La probabilité d'un évènement A est $p(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de l'univers}}$

a. La probabilité de l'évènement A, notée $p(A)$, arrondie à 10^{-2} près, vaut 0,47. En effet, il y a 266 430 véhicules de marque A sur un total de 571 870 véhicules contrôlés. $p(A) = \dfrac{266\,430}{571\,870} \approx 0{,}465\,89$

b. Donnons la probabilité conditionnelle, notée $p_A\left(\overline{C}\right)$, de l'évènement $\overline{C}$ sachant que l'évènement A est réalisé.
$p_A\left(\overline{C}\right) = 0{,}08$ car pour 8 % des véhicules de marque A, le contrôle technique est non conforme.

2. Complétons l'arbre de probabilité suivant :



3. **a.** L'évènement $C \cap A$ est l'évènement : « la fiche choisie est celle d'un véhicule de marque A et ce véhicule a subi un contrôle conforme ».

b. Calculons la probabilité $p(C \cap A)$.
$p(C \cap A) = p(A) \times p_A(C) = 0{,}47 \times 0{,}92 = 0{,}432\,4$

4. Calculons la probabilité de l'évènement C, arrondie à 10^{-2} près.
$p(C) = p(A \cap C) + p(B \cap C) = p(A) \times p_A(C) + p(B) \times p_B(C) = 0{,}432\,4 + 0{,}53 \times 0{,}94 = 0{,}432\,4 + 0{,}498\,2 = 0{,}930\,6$
La probabilité de l'évènement C est égale à 0,93 à 10^{-2} près.

5. Sachant que la fiche choisie est celle d'un véhicule ayant un contrôle technique conforme, la probabilité que ce véhicule soit de la marque A est notée $p_C(A)$.
$p_C(A) = \dfrac{p(A \cap C)}{p(C)} = \dfrac{0{,}43}{0{,}93} \approx 0{,}46.$

EXERCICE 3 **4 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).

Pour chaque question, **une seule des trois réponses proposées est correcte.**
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier sur la copie la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Chaque réponse correcte rapporte 1 point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

1. La variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance 12 et d'écart-type 2.
La probabilité de l'évènement $\{X \leqslant 10\}$, notée $P(X \leqslant 10)$, est égale à :

- $\cancel{P(X < 11)}$
- $\cancel{P(0 \leqslant X \leqslant 10)}$
- $\boxed{P(X < 10)}$

2. La variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance 12 et d'écart-type 2.
La probabilité de l'évènement $\{8 \leqslant X \leqslant 16\}$, notée $P(8 \leqslant X \leqslant 16)$, vaut, à 10^{-2} près :

- $\cancel{0{,}5}$
- $\boxed{0{,}95}$
- $\cancel{0{,}68}$

3. La variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance 12 et d'écart-type 2.
La probabilité de l'évènement $\{8 \leqslant X \leqslant 12\}$, notée $P(8 \leqslant X \leqslant 12)$, est égale à :

- $\cancel{1 - P(X \geqslant 8)}$
- $\cancel{0{,}5 + P(X \geqslant 8)}$
- $\boxed{0{,}5 - P(X \leqslant 8)}$

4. En France, le 1er janvier 2010, 48,7 % des foyers possédaient au moins un écran plat de télévision. Une étude s'intéresse à un échantillon de 150 foyers possédant au moins un écran plat de télévision et domiciliés dans une même ville. Un intervalle de fluctuation à au moins 95 % de la fréquence de ces foyers possédant un écran plat est :

- $\cancel{[48{,}6\,;\,48{,}8]}$
- $\cancel{[0{,}35\,;\,0{,}52]}$
- $\boxed{[0{,}40\,;\,0{,}57]}$

EXERCICE 4 **5 points**

Une entreprise fabrique des pièces mécaniques.
Le coût de production C, en euros, de x de ces pièces est donné, pour x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,25]$, par $C(x) = x^3 - 13,5x^2 + 60x + 1\,000$.
Chaque pièce est vendue 270 euros.
Un tableur a été utilisé pour calculer les coûts et les recettes qui figurent sur la feuille de calcul donnée en **annexe à rendre avec la copie**.
Dans cette feuille de calcul, deux valeurs ont été effacées.

1. Le coût de production de 2 pièces est $C(2)$. $C(2) = 2^3 - 13{,}5 \times 2^2 + 60 \times 2 + 1\,000 = 1\,074$.

2. **a.** La recette pour 2 pièces produites et vendues est $R(2)$. $R(2) = 270 \times 2 = 540$.

b. La formule qui a été saisie dans la cellule C2 puis recopiée vers le bas jusqu'à la cellule C27 pour obtenir la recette selon le nombre de pièces produites et vendues est : =270*$A3.

3. Pour 5 pièces produites et vendues, l'entreprise réalise un gain car la recette ($R(5) = 1\,350$) est supérieure aux coûts ($C(5) = 1\,087{,}50$).

4. L'entreprise réalise un gain lorsque les quantités de pièces produites et vendues appartiennent à $[5\,;\,21]$ puisque sur cet intervalle les recettes sont supérieures aux coûts.
Pour x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,25]$, le bénéfice est donné par :
$B(x) = -x^3 + 13,5x^2 + 210x - 1\,000$.

5. **a.** Déterminons $B'(x)$ pour $x \in [0\,;\,25]$.
$B'(x) = -3x^2 + 13{,}5(2x) + 210 = -3x^2 + 27x + 210 = -3(x^2 - 9x - 70)$.

b. Montrons que, pour $x[0\,;\,14]$, $B'(x) \geqslant 0$ et que, pour $x \in [14\,;\,25]$, $B'(x) \leqslant 0$.
Soit le trinôme $x^2 - 9x - 70$. Calculons Δ.
$\Delta = (-9)^2 - 4 \times 1 \times (-70) = 361 = 19^2$.
Le trinôme admet donc deux racines : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $\quad x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$,

soit $x_1 = \dfrac{9-19}{2} = -5$ et $x_2 = \dfrac{9+19}{2} = 14$.

$B'(x) = -3(x+5)(x-14) = (3x+15)(14-x)$.

Sur $[0\,;25]$, $3x+15>0$ par conséquent le signe de $B'(x)$ est celui de $14-x$.

Sur $\mathbb{R}$, $14-x>0 \iff x<14$. Par conséquent, nous avons bien montré que pour $x[0\,;\,14]$, $B'(x) \geqslant 0$ et que, pour $x \in [14\,;\,25]$, $B'(x) \leqslant 0$.

6. Étudions d'abord le sens de variation de B sur$[0\,;25]$.

Si pour tout $x \in I$ $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

Pour $x \in]14\,;\,25]$, $B'(x) < 0$, par conséquent B est strictement décroissante sur cet intervalle.

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.

Pour $x \in [0\,;\,14[$, $B'(x) > 0$ par conséquent B est strictement croissante sur cet intervalle.

Dressons le tableau des variations de la fonction B sur l'intervalle $[0\,;25]$.

x	0		14		25
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de B			1 842		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	$-1\,000$				$-2\,938$

7. Pour quatorze pièces produites et vendues le bénéfice est maximal.

Ce bénéfice vaut alors 1 842 euros.

Annexe à rendre avec la copie

EXERCICE 1

n		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u	3,2	3,39	3,60	3,81	4,04	4,28	4,54	4,81	5,10	5,41	5,73	6,07	6,44
S	3,2	6,59	10,19	14	18,04	22,32	26,86	31,67	36,77	42,18	47,91	53,98	60,42

EXERCICE 4

	A	B	C
1	Nombre de pièces	Coût en milliers d'euros	Recette en milliers d'euros
2	0	1 000,0	0
3	1	1 047,5	270
4	2		
5	3	1 085,5	810
6	4	1 088,0	1 080
7	5	1 087,5	1 350
8	6	1 090,0	1 620
9	7	1 101,5	1 890
10	8	1 128,0	2 160
11	9	1 175,5	2 430
12	10	1 250,0	2 700
13	11	1 357,5	2 970
14	12	1 504,0	3 240
15	13	1 695,5	3 510
16	14	1 938,0	3 780
17	15	2 237,5	4 050
18	16	np2600,0	4 320
19	17	3 031,5	4 590
20	18	3 538,0	4 860
21	19	4 125,5	5 130
22	20	4 800,0	5 400
23	21	5 567,5	5 670
24	22	6 434,0	5 940
25	23	7 405,5	np6210
26	24	8 488,0	6 480
27	25	9 687,5	6 750