Corrigé du baccalauréat STMG Polynésie 15 juin 2015

Durée : 3 heures

EXERCICE 1 **6 points**

Une entreprise, qui fabrique et vend des ordinateurs sur commande, modélise le bénéfice en euros pour x ordinateurs fabriqués et vendus en une journée, par la fonction :

$$f(x) = x^3 - 60x^2 + 900x - 500.$$

L'entreprise ne pouvant construire plus de 30 ordinateurs par jour, on aura $0 \leqslant x \leqslant 30$.

1. **a.** Calculons le bénéfice pour 4 puis pour 10 ordinateurs.

$f(4) = 4^3 - 60 \times 4^2 + 900 \times 4 - 500 = 2\,204, \quad f(10) = 3\,500.$

Le bénéfice pour 4 ordinateurs est de 2 204 euros et pour 10 ordinateurs de 3 500 euros.

b. Calculons $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f.

$f'(x) = 3x^2 - 60(2x) + 900 = 3x^2 - 120x + 900 = 3(x^2 - 40x + 300).$

c. Avant d'étudier le signe de $f'(x)$, essayons de factoriser cette expression.

$\Delta = 40^2 - 4 \times 300 = 400 \quad \Delta > 0$ le trinôme admet deux racines :

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$

$x_1 = \dfrac{40 - \sqrt{400}}{2} = 10 \quad x_2 = \dfrac{40 + 20}{2} = 30.$

par conséquent $f'(x) = 3(x - 10)(x - 30)$.

Étudions le signe de $f'(x)$

x	0		10		30
$x - 10$		$-$	0	$+$	
$x - 30$		$-$		$-$	0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I

Sur $]10\,;\,30]$, $f'(x) < 0$ par conséquent la fonction f est strictement décroissante sur cet intervalle.

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.

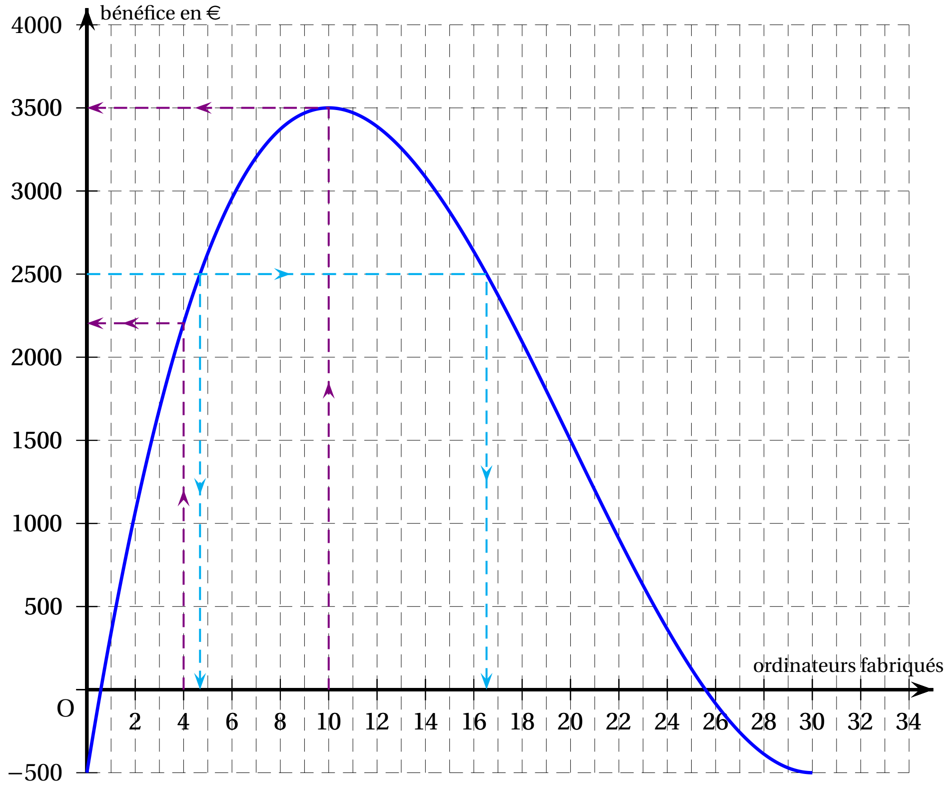
Sur $[0\,;\,10[$, $f'(x) > 0$ par conséquent la fonction f est strictement croissante sur cet intervalle.

Dressons maintenant, le tableau de variation de f.

x	0		10		30
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de f	-500	$\nearrow$	3 500	$\searrow$	-500

d. Pour avoir un bénéfice maximal, l'entreprise doit fabriquer et vendre chaque jour 10 ordinateurs. Le bénéfice s'élèvera alors à 3 500 euros.

2. La courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-dessous représente l'évolution du bénéfice en fonction du nombre d'ordinateurs fabriqués et vendus en une journée suivant le modèle choisi par l'entreprise.



a. Par lecture graphique, déterminons combien d'ordinateurs l'entreprise doit fabriquer et vendre en une journée si elle veut un bénéfice d'au moins 2 500 €.

Les solutions devant être entières, l'entreprise doit fabriquer et vendre entre 5 et 16 ordinateurs par jour.

b. Une grande surface veut acheter des ordinateurs. Elle propose au choix deux contrats à cette entreprise :

- contrat A : acheter 300 ordinateurs à fabriquer en dix jours ;
- contrat B : acheter 100 ordinateurs à fabriquer en cinq jours.

L'entreprise a intérêt à choisir le contrat B. En effet si elle choisit le contrat A, cela l'obligera à fabriquer trente ordinateurs par jour et perdra par jour 500 euros, tandis qu'avec, le contrat B, elle fabriquera 20 ordinateurs par jour et ainsi elle gagnera 1 500 euros par jour.

EXERCICE 2 — 6 points

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

On s'intéresse aux évolutions décennales (par période de 10 ans) du P.I.B. en France de 1950 à 2010.

Années	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6
P.I.B. en milliards d'euros y_i	15,5	47,0	126,1	453,2	1 058,6	1 485,3	1 998,5

Source : Comptes nationaux - Base 2010, Insee

Partie A :

1. Dans le graphique **en annexe à rendre avec la copie**, le nuage de points de coordonnées $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ pour i variant de 0 à 6 a été représenté.

2. À l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés en se limitant à la période 1970–2010 est $y = 477{,}69x - 886{,}42$.

3. On ajuste l'ensemble du nuage avec la droite (D) d'équation $y = 478x - 886$.

Cette droite est tracée sur le graphique **en annexe à rendre avec la copie**.

4. On se propose d'ajuster ce nuage de points par la parabole, tracée sur le graphique en annexe, d'équation $y = 56x^2 + 12,6x - 25$.

Une estimation du P.I.B. en 2020 serait en milliards d'euros de 2 460 en prenant l'ajustement affine pour $x = 7$. En effet depuis 1980, l'accroissement durant une décennie a tendance à se stabiliser autour de 500 milliards d'euros, les trois derniers points semblent bien alignés.

Partie B :

1. Calculons le taux d'évolution du P.I.B. de 2000 à 2010 arrondi au dixième.

Le taux d'évolution est défini par $\frac{\text{valeur finale}-\text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}}$.

$t = \dfrac{1\,998,5 - 1\,485,3}{1\,485,3} \approx 0,345\,52$.

Le taux d'évolution du P.I.B. de 2000 à 2010 est d'environ 0,3 ou de 34,5 %.

2. Calculons le taux d'évolution annuel moyen du P.I.B. pour cette même période arrondi au dixième.

En appelant t_m le taux moyen, le coefficient multiplicateur global est aussi $(1+t_m)^{10}$ puisque le P.I.B. a subi 10 évolutions durant cette période.

$(1 + t_m)^3 = 1,345\,52$ par conséquent $t_m = 1,345\,52^{\frac{1}{10}} - 1 \approx 0,030\,12$.

le taux d'évolution annuel moyen du P.I.B. est d'environ 0,030 ou de 3,0 %.

3. Pour savoir dans quelle décennie il y a eu la plus forte évolution, on utilise une feuille de calcul d'un tableur. On calcule les coefficients multiplicateurs pour chacune des évolutions.

	A	B	C
1	Année	P.I.B.	coefficient
2	1950	15,5	
3	1960	47,0	3,032 258 06
4	1970	126,1	2,682 978 72
5	1980	453,2	3,593 973 04
6	1990	1 058,6	2,335 834 07
7	2000	1485,3	1,403 079 54
8	2010	1 998,5	

a. Une formule qui, saisie dans la cellule C3 puis recopiée vers le bas, permet d'obtenir les valeurs de la colonne C est : =$B3/$B2

Dans le cas présent, les $ ne sont pas obligatoires.

b. Calculons le coefficient multiplicateur manquant en C8. $\dfrac{\$B8}{\$B7} = \dfrac{1\,998,5}{1\,485,3} \approx 1,345\,519\,42$.

le coefficient multiplicateur en C8 est aussi $1 + t$ où t est calculé à la question **B 1.**

c. La décennie qui a vu la plus forte évolution du P.I.B. est celle de 1970–1980 puisque le coefficient multiplicateur est le plus élevé de la période 1950 – 2010.

EXERCICE 3 — 4 points

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A :

On a prouvé qu'une des origines d'une maladie était génétique. On estime que 0,1 % de la population est porteur du gène en cause. Lorsqu'un individu est porteur du gène, on estime à 0,8 la probabilité qu'il développe la maladie. Mais s'il n'est pas porteur du gène il y a tout de même une probabilité de 0,01 qu'il développe la maladie.
Lorsqu'un individu est choisi au hasard dans la population, on considère les évènements suivants :

- G : « le patient est porteur du gène » ;
- M : « le patient développe la maladie ».

1. En utilisant les données, l'arbre est complété sur l' **annexe à rendre avec la copie** .
2. La probabilité de l'évènement « le patient est porteur du gène et il développe la maladie » est notée $p(G \cap M)$.

   $p(G \cap M) = p(G) \times p_G(M) = 0{,}001 \times 0{,}8 = 0{,}000\,8$.
3. La probabilité qu'il soit porteur du gène sachant qu'il a développé la maladie est notée $p_M(G)$.

   $p_M(G) = \dfrac{p(G \cap M)}{p(M)}$. Calculons alors $p(M)$.

   $p(M) = p(G) \times p_G(M) + p(\overline{G}) \times p_{\overline{G}}(M) = 0{,}008 + 0{,}999 \times 0{,}01 = 0{,}101\,9$

   $p_M(G) = \dfrac{0{,}000\,8}{0{,}101\,9} \approx 0{,}074\,1$.

   La probabilité qu'il soit porteur du gène sachant qu'il a développé la maladie est à 0,000 1près 0,074 1.

Partie B :

Un laboratoire pharmaceutique fabrique un traitement préventif pour éviter la survenue de cette maladie. Il avertit que 30 % des patients traités auront des effets secondaires.
Plusieurs études sont réalisées par différents médecins et des patients volontaires pour vérifier les estimations du laboratoire. Les médecins sont invités à rentrer leurs données dans un logiciel qui utilise l'algorithme ci-contre :

1. Un médecin a traité 150 patients; parmi ceux-ci, 40 ont eu des effets secondaires.

   Le résultat affiché par ce logiciel est :

   « résultats conformes ».
2. Pour un autre, sur 200 patients, 75 ont eu des effets secondaires.

   le logiciel affichera alors :

   « résultats non conformes ».
3. Dans cet algorithme l'intervalle $[a~;~b]$ représente l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.

Variables :
  n, s sont des entiers
  a, b sont des nombres réels
Entrée :
  Afficher « Entrer le nombre de patients traités »
  Saisir n
  Afficher « Entrer le nombre de patients ayant eu des effets secondaires »
  Saisir s
Traitement :
  a prend la valeur $0,3 - \frac{1}{\sqrt{n}}$
  b prend la valeur $0,3 + \frac{1}{\sqrt{n}}$
   Si $a \leqslant \frac{s}{n} \leqslant b$
    Alors afficher : « résultats conformes »
    Sinon afficher : « résultats non conformes »
   Fin Si

EXERCICE 4 **4 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est correcte.
Indiquer sur votre copie le numéro de la question ainsi que la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse juste rapporte 1 point; une réponse fausse, une réponse multiple ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

1. La suite (U_n) est géométrique de premier terme $U_0 = 10$ et de raison $q = 3$, alors :

a. $\cancel{U_4 = 22}$ **b.** $\boxed{U_4 = 810}$ **c.** $\cancel{U_4 = 10 \times 3^3}$ **d.** $\cancel{U_4 = 10 + 3 \times 4}$

2. La suite (V_n) est arithmétique de premier terme $V_0 = 0$ et de raison $r = 5$ alors la somme $V_0 + V_1 + \cdots + V_{10}$ est égale à :

a. $\cancel{0}$ **b.** $\cancel{50}$ **c.** $\cancel{250}$ **d.** $\boxed{275}$

Une ville a décidé d'augmenter de 10 % ses logements sociaux chaque année. En 2012 elle avait 150 logements sociaux. Pour tout entier n, on note a_n le nombre de logements sociaux dans cette ville en $(2012 + n)$. On a donc $a_0 = 150$.

3. On aura alors :

a. $\cancel{a_1 = 135}$ **b.** $\cancel{a_3 = 180}$ **c.** $\cancel{a_3 = 195}$ **d.** $\boxed{a_n = 150 \times 1,10^n}$.

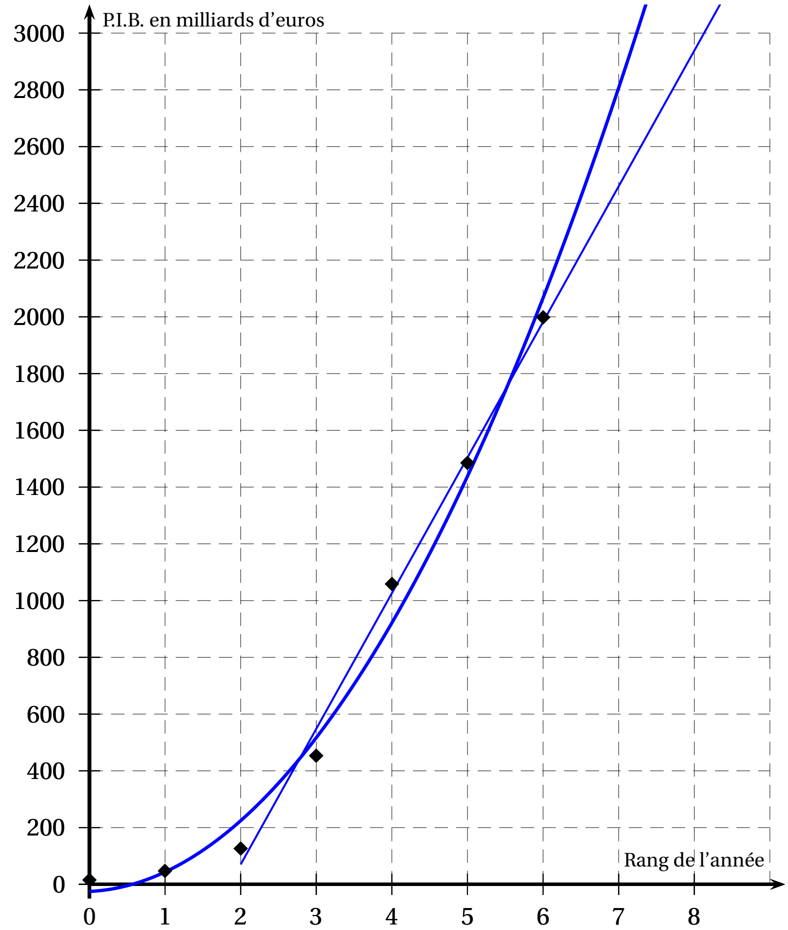
4. La ville souhaite au moins doubler le nombre de ses logements sociaux. Cet objectif sera dépassé en :

a. $\cancel{2015}$ **b.** $\cancel{2017}$ **c.** $\boxed{2020}$ **d.** $\cancel{2022}$

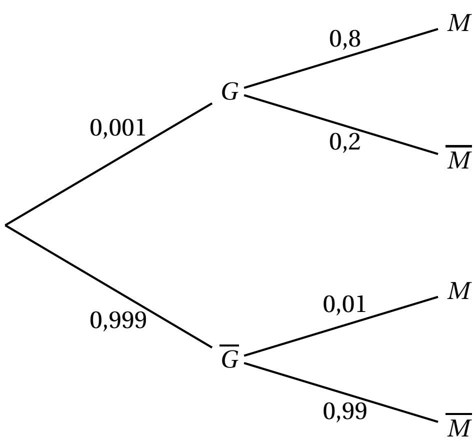
remarque : Il est bien entendu que l'objectif sera aussi dépassé en 2022 mais pas pour la première fois.

Annexe à rendre avec la copie

Exercice 2



Exercice 3



Si vous photocopiez ce corrigé pensez à en créditer l'**A. P. M. E. P.**, merci.