Corrigé du baccalauréat STMG Polynésie 18 juin 2019

EXERCICE 1 **5 points**

Cet exercice est un Questionnaire à Choix Multiples (QCM).
Pour chaque question, une et une seule réponse est exacte.
Une réponse juste rapporte un point tandis qu'une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.
Recopier sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

1. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale de paramètres $\mu = 12$ et $\sigma = 2$.
Quelle est la valeur de la probabilité $P(X \geqslant 14)$ arrondie au centième?

A. $\boxed{0,16}$ **B.** ~~0,20~~ **C.** ~~0,80~~ **D.** ~~0,84~~

2. Un candidat aux élections municipales a fait réaliser un sondage auprès de 400 électeurs. 112 de ces 400 électeurs ont affirmé vouloir voter pour ce candidat. Un intervalle de confiance au seuil de 95 % dans lequel devrait se trouver la proportion d'électeurs votant pour le candidat aux élections municipales est :

A. $\boxed{[0,230\,;\,0,330]}$ **B.** ~~[0,277 ; 0,283]~~ **C.** ~~[0,307 ; 0,407]~~ **D.** ~~[0,354 ; 0,360]~~

3. Soit (v_n) la suite géométrique de raison $q = 1,2$ et de premier terme $v_1 = 6$.
Quelle est la valeur de v_6 arrondie au dixième?

A. ~~12,0~~ **B.** ~~13,2~~ **C.** $\boxed{14,9}$ **D.** ~~17,9~~

4. On considère l'algorithme suivant. Quelle est la valeur de n à la fin de cet algorithme?

```
n ← 1
V ← 6
Tant que V < 31
    n ← n + 1
    V ← V × 1,2
FinTant que
```

A. ~~9~~ **B.** ~~10~~ **C.** $\boxed{11}$ **D.** ~~12~~

5. Soit (u_n) la suite arithmétique de raison 3 et telle que $u_4 = 81$.
Le premier terme u_0 de la suite (u_n) est :

A. ~~1~~ **B.** ~~3~~ **C.** $\boxed{69}$ **D.** ~~72~~

EXERCICE 2 **5 points**

Les parties A *et* B *de cet exercice sont indépendantes.*

Partie A

Deux ateliers A et B fabriquent des stylos pour une entreprise.
L'atelier A fabrique 60 % des stylos, et parmi ceux-là, 5 % possèdent un défaut de fabrication.
De plus, 1 % des stylos possèdent un défaut de fabrication et sortent de l'atelier B.
Un stylo est prélevé au hasard dans le stock de l'entreprise.
On considère les évènements suivants :

A : « Le stylo a été fabriqué par l'atelier A »

B : « Le stylo a été fabriqué par l'atelier B »

D : « Le stylo possède un défaut de fabrication »

1. Donnons les probabilités suivantes :

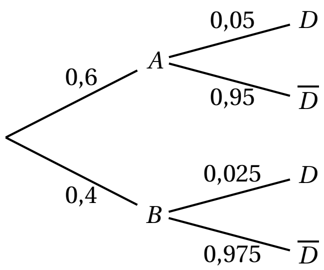
— $P(A) = 0{,}6$ car l'atelier A fabrique 60 % des stylos

— $P(B) = 1 - P(A) = 0{,}4$

— $P_A(D) = 0{,}05$ car parmi ceux de l'atelier A, 5 % possèdent un défaut de fabrication.

— $P(B \cap D) = 0{,}01$ car 1 % des stylos possèdent un défaut de fabrication et sortent de l'atelier B.

On pourra s'appuyer sur un arbre de probabilités que l'on complétera au fur et à mesure pour répondre aux questions suivantes.



2. a. La probabilité qu'un stylo provienne de l'atelier A et possède un défaut de fabrication est notée : $P(A \cap D)$. $P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0{,}6 \times 0{,}05 = 0{,}03$.

b. La probabilité qu'un stylo possède un défaut de fabrication est $P(D)$. A et B forment une partition de l'univers. $P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = 0{,}03 + 0{,}01 = 0{,}04$.

3. La probabilité qu'il possède un défaut sachant qu'il provient l'atelier B est notée $P_B(D)$.

$P(B \cap D) = P(B) \times P_B(D)$ d'où $P_B(D) = \dfrac{P(B \cap D)}{P(B)} = \dfrac{0{,}01}{0{,}4} = 0{,}025$.

Partie B

Dans cette partie, on suppose que 4 % des stylos possèdent un défaut de fabrication.
L'entreprise confectionne des paquets contenant chacun 25 stylos.
Le fait qu'un stylo possède ou non un défaut de fabrication est indépendant des autres stylos.
On appelle X la variable aléatoire donnant pour un paquet le nombre de stylos qui possèdent un défaut de fabrication.
On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.

1. Les paramètres de cette loi binomiale sont $n = 25$ et $p = 0{,}04$.
Par conséquent, $p(X = k) = \binom{25}{k}(0{,}04)^k(0{,}96)^{25-k}$.

2. Le directeur de l'entreprise affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'un paquet ne comporte aucun stylo défectueux. A-t-il raison ?
Pour répondre à cette question calculons $p(X = 0)$.
$p(X = 0) = \binom{25}{0}(0{,}04)^0(0{,}96)^{25-0} = 0{,}96^{25} \approx 0{,}360$
Cette probabilité étant inférieure à 0,5, le directeur n'a donc point raison.

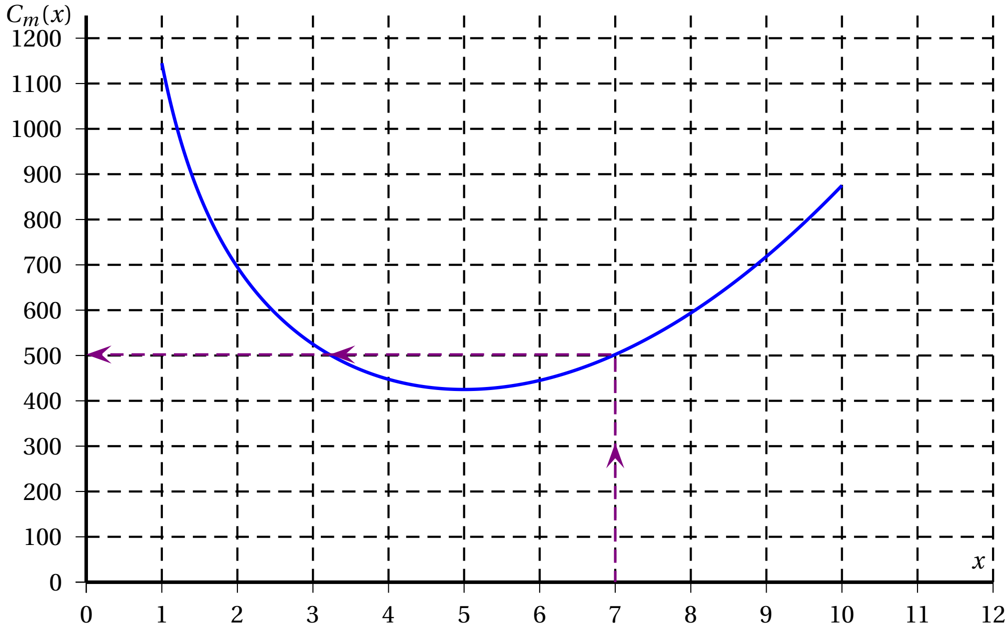
EXERCICE 3 **6 points**

Une entreprise fabrique chaque jour des rouleaux de tissu en coton.
La production quotidienne varie entre 1 et 10 kilomètres de tissu.
On note x la production de tissu en kilomètres.
Le coût total de production, exprimé en euros, de x kilomètres de tissu est donné par la fonction C définie pour x appartenant à $[1\,;\,10]$ par :

$$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750.$$

Partie A : lectures graphiques

On appelle coût moyen de production la fonction C_m définie sur l'intervalle $[1\,;\,10]$ par : $\dfrac{C(x)}{x}$.
La représentation graphique de la fonction C_m est donnée ci-dessous.



1. Par lecture graphique, une valeur approchée de $C_m(7)$ est 500.
2. À l'aide de la représentation graphique, dressons le tableau de variation de C_m sur [1 ; 10]. Les valeurs ont été calculées.

x	1	5	10
Variation de C_m	1145 ↘	425	↗ 875

3. Par lecture graphique l'entreprise doit fabriquer cinq kilomètres de tissu pour que le coût moyen de production soit minimal. C'est l'abscisse que nous avons lue pour dresser le tableau de variation.

Partie B : étude du bénéfice

On suppose que l'entreprise vend chaque jour sa production journalière.
Le prix de vente d'un kilomètre de tissu est de 680 €.
On rappelle que le nombre de kilomètres de tissu x fabriqués varie chaque jour entre 1 et 10.
On note $R(x)$ la recette, exprimée en euros, correspondant à la vente de x kilomètres de tissu.
On note $B(x)$ le bénéfice, exprimé en euros, réalisé par l'entreprise pour la vente de x kilomètres de tissu.

1. $R(x) = 680x$ puisque le prix de vente d'un kilomètre de tissu est de 680 €.
2. Déterminons l'expression de $B(x)$ en fonction de x :
   $B(x) = R(x) - C(x) = 680x - (15x^3 - 120x^2 + 500x + 750) = -15x^3 + 120x^2 + 180x - 750$.
   Nous trouvons bien l'expression cherchée.
3. On note B' la fonction dérivée de la fonction B. Pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle [1 ; 10], $B'(x) = -15(3x^2) + 120(2x) + 180 = -45x^2 + 240x + 180$.
4. **a.** Étudions pour tout x réel le signe du trinôme $-45x^2 + 240x + 180$.
   Nous pouvons remarquer que ce trinôme peut aussi s'écrire $-15(3x^2 - 16x - 12)$.
   Déterminons les racines de $3x^2 - 16x - 12$. Calculons le discriminant
   $\Delta = (-16)^2 - 4 \times (3) \times (-12) = 256 + 144 = 400 = 20^2$.
   $\Delta > 0$, le trinôme a deux racines distinctes $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $\quad x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
   $x_1 = \dfrac{-(-16) - 20}{6} = -\dfrac{2}{3}$ $\quad x_2 = \dfrac{16 + 20}{6} = 6$ d'où
   $-45x^2 + 240x + 180 = -15(3x^2 - 16x - 12) = -45\left(x + \frac{2}{3}\right)(x - 6)$
   Étudions son signe sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$-2/3$		6		$+\infty$
-45		$-$		$-$		$-$	
$x+\frac{2}{3}$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-6$		$-$		$-$	0	$+$	
$-45x^2+240x+180$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b. En déduire le signe de la fonction B' sur l'intervalle $[1\,;\,10]$.

x	1		6		10
$B'(x)$		$+$	0	$-$	

5. En utilisant la question précédente, dressons le tableau de variation complet de la fonction B sur l'intervalle $[1\,;\,10]$.

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.

Sur $[1\,;\,6[$, $B'(x) > 0$ par conséquent B est strictement croissante sur cet intervalle.

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

Sur $]6\,;\,10]$, $B'(x) < 0$ par conséquent B est strictement décroissante sur cet intervalle.

Construisons le tableau de variation de B sur $[1\,;\,10]$.

x	1		6		10
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de B	-465	$\nearrow$	$1\,410$	$\searrow$	$-1\,950$

6. B admet un maximum en 6 qui vaut 1 410. L'entreprise doit produire et vendre chaque jour pour que le bénéfice réalisé soit maximal six kilomètres de tissu. Ce bénéfice maximal vaut alors 1 410 €.

EXERCICE 4 — 4 points

Le tableau suivant donne le chiffre d'affaires mondial d'une entreprise entre 2010 et 2016 en millions d'euros.

Année	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6
Chiffre d'affaires y_i (en millions d'euros)	18,3	20,1	23,3	25,3	27,8	30,6	32,4

Partie A : étude d'un premier modèle

1. Sur le graphique donné en annexe à rendre avec la copie, nous avons représenté le nuage de points de coordonnées $(x_i\,;\,y_i)$ pour i variant de 0 à 6.

2. **a.** À l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés est $y = 2{,}42x + 18{,}14$. Les coefficients sont arrondis au centième.

Dans la suite, on choisit la droite d d'équation $y = 2{,}4x + 18{,}1$ comme ajustement affine du nuage de points.

b. La droite d est tracée sur le même graphique donné en annexe.

3. En supposant que cet ajustement demeure valable pendant plusieurs années, par lecture graphique le chiffre d'affaires, au million près, de cette entreprise en 2020 est d'environ 42 millions. Nous lisons l'ordonnée du point de la droite d d'abscisse 10.

Partie B : étude d'un second modèle

1. Déterminons, à l'aide du tableau, le taux d'évolution global du chiffre d'affaires de l'entreprise entre 2010 et 2016. On exprimera le résultat en pourcentage arrondi au centième. Le taux d'évolution $\mathcal{T}$ est défini par $\dfrac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}}$.

$\mathcal{T} = \dfrac{32{,}4 - 18{,}3}{18{,}3} \approx 0{,}770\,49$.

Le taux global d'évolution du chiffre d'affaires de l'entreprise entre 2010 et 2016 exprimé en pourcentage et arrondi à 0,01 % est de 77,05 %.

2. Déterminons le taux d'évolution moyen annuel entre 2010 et 2016, exprimé en pourcentage arrondi à l'entier le plus proche.

En appelant t_m le taux moyen, le coefficient multiplicateur global est aussi $(1 + t_m)^6$ puisque le chiffre d'affaires a subi 6 évolutions durant cette période.

$(1 + t_m)^6 = \dfrac{32{,}4}{18{,}3} \approx 1{,}770\,49$ par conséquent $t_m = 1{,}770\,49^{\frac{1}{6}} - 1 \approx 0{,}099\,89$.

Le taux d'évolution moyen annuel du chiffre d'affaires de l'entreprise entre 2010 et 2016, arrondi à l'entier le plus proche, est égal à 10 %.

3. On suppose que le taux d'évolution annuel sera de 10 % entre 2016 et 2020. Estimons le chiffre d'affaires de l'entreprise en 2020.

À un taux d'évolution de 10 % correspond un coefficient multiplicateur de 1,1. Entre 2016 et 2020 il y a 4 évolutions donc en 2020 nous pouvons estimer le chiffre d'affaires à $32{,}4 \times 1{,}1^4 \approx 47{,}44$ soit en arrondissant au million 47 millions.

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Exercice 4 :