Corrigé du baccalauréat STMG Polynésie 20 juin 2018

EXERCICE 1 **4 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.
Pour chaque affirmation, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Recopier sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est attendue.
Une réponse correcte rapporte un point, une réponse incorrecte ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

Une espèce d'oiseaux rares voit sa population diminuer de 3 % chaque année.
On recense 300 oiseaux de cette espèce en 2017.
On modélise le nombre d'oiseaux de cette espèce en l'année $2017+n$ par une suite (u_n).
Ainsi $u_0 = 300$.

1. En 2018, la population sera de :

A. $\boxed{\text{291 oiseaux}}$ **B.** ~~297 oiseaux~~ **C.** ~~90 oiseaux~~ **D.** ~~210 oiseaux~~

2. La suite (u_n) est :

A. ~~arithmétique de raison −9~~ **B.** ~~géométrique de raison 0,03~~
C. $\boxed{\text{géométrique de raison } 0,97}$ **D.** ~~ni arithmétique, ni géométrique~~

3. On donne la feuille de tableur ci-dessous :

	A	B
1	n	$u(n)$
2	0	300
3	1	
4	2	

Quelle formule saisie dans la cellule B3 permettra d'afficher les termes successifs de la suite (u_n) en l'étirant vers le bas ?

A. ~~= B2 − 0,03~~ **B.** ~~= B2 ∗ 0,03~~ **C.** ~~=B2 ∗ 0,97^A3~~ **D.** $\boxed{= \text{B2} * 0,97}$

4. On donne un extrait des résultats obtenus dans la feuille de tableur précédente :

	A	B
22	20	163
23	21	158
24	22	153
25	23	149

On peut en déduire que la population aura diminué de moitié par rapport à 2017 à partir de :

A. ~~2039~~ **B.** $\boxed{2040}$ **C.** ~~2041~~ **D.** ~~2042~~

EXERCICE 2 **3 points**

On choisit au hasard un salarié dans une première entreprise. On modélise l'âge du salarié par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance 40 et d'écart type 5.
Si besoin, on arrondira les probabilités à 10^{-2}.

1. La probabilité que le salarié ait entre 35 et 50 ans est notée $p(35 \leqslant X \leqslant 50)$. À l'aide de la calculatrice, nous trouvons, arrondi à 10^{-2}, $p(35 \leqslant X \leqslant 50) \approx 0{,}82$.
2. Calculons la probabilité de l'évènement $(X \geqslant 45)$.

   À l'aide de la calculatrice, $p(X \geqslant 45) = 0{,}16$
3. Dans une deuxième entreprise, on choisit un salarié. L'âge du salarié choisi est modélisé par une variable aléatoire Y suivant une loi normale telle que $P(Y \geqslant 45) = 0,5$ et

   $P(37 \leqslant Y \leqslant 53) \approx 0,95$.

   Déterminons les valeurs de l'espérance μ et de l'écart type σ de la loi normale suivie par Y.

   Nous savons que $p(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,95$.

   Par conséquent nous obtenons $\begin{cases} \mu - 2\sigma = 37 \\ \mu + 2\sigma = 53 \end{cases}$

   En résolvant ce système, nous trouvons $\mu = 45$ et $\sigma = 4$

EXERCICE 3 **5 points**

Le tableau ci-dessous donne le nombre de catastrophes naturelles dans le monde en 1955, 1966, 1977, 1988 et 1999 :

Année	1955	1966	1977	1988	1999
Rang de l'année x_i	0	11	22	33	44
Nombre de catastrophes naturelles y_i	30	81	140	237	414

Source : https ://www.notre-planete.info

1. Dans le repère fourni en annexe (à rendre avec la copie), nous avons représenté le nuage de points $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ associé au tableau précédent.
2. **a.** À l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés est $y = 8,4x - 4,4$. Cette droite est tracée sur le graphique fourni en annexe.

   b. En se servant de cet ajustement, estimons le nombre de catastrophes naturelles ayant eu lieu en 1990. En 1990, le rang de l'année est 35. Remplaçons dans l'équation de la droite x par 35. Nous obtenons alors $y = 8,4 \times 35 - 4,4$ soit $y = 289,6$

   Selon ce modèle, nous pouvons estimer à 290 le nombre de catastrophes naturelles survenues en 1990.
3. De 1999 à 2000 on a enregistré une augmentation de 27 % du nombre de catastrophes naturelles.

   Combien de catastrophes naturelles l'année 2000 a-t-elle comptées ?

   À une augmentation de 27 % correspond un coefficient multiplicateur de $1 + \dfrac{27}{100}$ soit 1,27.

   $414 \times 1,27 = 526{,}78$, nous pouvons considérer qu'en 2000 il y a eu 527 catastrophes naturelles.
4. De 2000 à 2016, le nombre de catastrophes naturelles a diminué de 43,5 %.

   Déterminons le taux d'évolution annuel moyen sur cette période.

   En appelant t_m le taux moyen, le coefficient multiplicateur global est $(1 + t_m)^{16}$ puisque le nombre de catastrophes naturelles a subi 16 évolutions durant cette période.

$(1+t_m)^{16} = 1 - \dfrac{43{,}5}{100} = 0{,}565$ par conséquent $t_m = 0{,}565^{\frac{1}{16}} - 1 \approx -0{,}0355054$.

Le taux moyen d'évolution du nombre de catastrophes naturelles entre 2000 et 2016, arrondi à 0,01 %, est d'environ $-3{,}55\,\%$.

EXERCICE 4 **8 points**

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Dans le pays Écoland, en 2080, les véhicules roulent exclusivement à l'électricité ou aux biocarburants. Par ailleurs, il existe des véhicules sans chauffeur.

70 % des véhicules sont avec chauffeur. Parmi eux, $\dfrac{4}{7}$ roulent aux biocarburants et les autres roulent à l'électricité.

30 % des véhicules sont sans chauffeur. Parmi eux, $\dfrac{2}{3}$ roulent aux biocarburants et les autres roulent à l'électricité.

On choisit un véhicule de ce pays au hasard et on note :

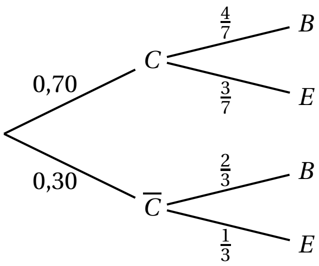
C l'évènement : « le véhicule est avec chauffeur » ;

B l'évènement : « le véhicule roule aux biocarburants » ;

E l'évènement : « le véhicule roule à l'électricité ».

Les probabilités seront exprimées en valeur exacte (fraction irréductible ou forme décimale).

1. Complétons l'arbre de probabilités ci-dessous permettant de modéliser la situation :



où $\overline{C}$ désigne l'évènement contraire de C.

2. La probabilité que le véhicule choisi roule aux biocarburants est $p(B)$.

$p(B) = p(C) \times p_C(B) + p(\overline{C}) \times p_{\overline{C}}(B) = 0{,}7 \times \dfrac{4}{7} + 0{,}30 \times \dfrac{2}{3} = 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}6$

3. On suppose que le véhicule choisi roule aux biocarburants.

La probabilité que ce soit un véhicule sans chauffeur sachant que le véhicule roule aux biocarburants est notée $p_B(\overline{C})$.

$p_B(\overline{C}) = \dfrac{p(B \cap \overline{C})}{p(B)} = \dfrac{0{,}2}{0{,}6} = \dfrac{1}{3}$

Partie B

On s'intéresse à la consommation d'un véhicule roulant aux biocarburants en fonction de la vitesse de ce véhicule.

Cette consommation est modélisée par la fonction f définie sur $[30\,;\,130]$ par :

$$f(x) = \frac{8x^2 - 800x + 30000}{x^2} \quad \text{pour } x \text{ dans } [30\ ;\ 130]$$

où x est exprimé en km/h et $f(x)$ est exprimé en litres pour 100 km.

1. Suivant ce modèle, lorsque le véhicule roule à 30 km/h, sa consommation est $f(30)$.

$f(30) = \dfrac{44}{3} \approx 14,67$.

Sa consommation lorsqu'il roule à 50 km/h est $f(50)$. $f(50) = 4$.

2. Montrons que la dérivée f' de f sur $[30 ; 130]$ peut s'écrire $f'(x) = \dfrac{800x - 60\,000}{x^3}$.

$f'(x) = \dfrac{(8(2x) - 800)x^2 - 2x(8x^2 - 800x + 30\,000)}{x^4} = \dfrac{x(16x^2 - 800x - 16x^2 + 1\,600x - 60\,000)}{x^4}$

$f'(x) = \dfrac{800x - 60\,000}{x^3}$. Nous obtenons bien le résultat attendu.

3. Étudions le signe de $f'(x)$ sur $[30 ; 130]$

$x \in [30 ; 130]$ par conséquent le signe de $f'(x)$ est celui de $800x - 60\,000$ ou de $x - 75$

Sur $\mathbb{R}$, $x - 75 > 0 \iff x > 75$. Il en résulte

si $x \in [30 ; 75[$, $f'(x) < 0$ et si $x \in]75 ; 130]$, $f'(x) > 0$

Étudions le sens de variation de f.

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur I.

Sur $[30 ; 75[$, $f'(x) < 0$ par conséquent f est strictement décroissante sur cet intervalle.

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors la fonction f est strictement croissante sur I.

Sur $]75 ; 130[$, $f'(x) > 0$ par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.

Dressons le tableau de variation de f sur cet intervalle :

x	30		75		130
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de f	44/3	$\searrow$	8/3	$\nearrow$	612/169

4. La consommation est minimale pour la vitesse de 75 km/h

Cette consommation vaut alors, arrondie à 0,01 près,2,67 pour 100 km.

5. On considère l'algorithme ci-dessous :

$x \leftarrow 30$
$y \leftarrow \dfrac{44}{3}$
Tant que $y \geqslant 4$
    $x \leftarrow x + 1$
    $y \leftarrow \dfrac{8x^2 - 800x + 30\,000}{x^2}$
Fin Tant que

La valeur de la variable x à la fin de l'exécution de l'algorithme est 51. Nous avons montré que la consommation pour $x = 50$ était de 4 litres pour 100 km et que sur $[30 ; 75[$, la fonction était décroissante par conséquent l'algorithme s'arrêtera juste après 50 donc à 51. Une interprétation dans le contexte de l'exercice est que la consommation sera strictement inférieure à 4 litres aux 100 kilomètres lorsque la vitesse sera supérieure à 51 km/h.

Annexe à l'exercice 3

À rendre avec la copie