Corrigé du baccalauréat STMG Polynésie 7 juin 2016

EXERCICE 1 **(8 points)**

À partir des recensements effectués tous les dix ans, on a établi le tableau suivant qui donne l'évolution de la population française en millions d'individus entre 1851 et 1911. Peu de données sont disponibles pour l'année 1871.

	Population en 1851	Population en 1861	Population en 1881	Population en 1891	Population en 1901	Population en 1911
Rang de la décennie : x_i	0	1	3	4	5	6
Population en millions :y_i	35	37,4	37,7	39,9	39	39,6

Source : INSEE

Partie A : Approximation de la population en 1871.

1. Le nuage de points de coordonnées $(x_i\ ;\ y_i)$ est placé sur le graphique donné en annexe.
2. À l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement affine de y en fonction de x obtenue par la méthode des moindres carrés est $y = 0,701x + 35,881$ (Les coefficients sont arrondis au millième).
3. On décide d'ajuster ce nuage de points par la droite (d) d'équation $y = 0,7x + 35,9$. Cette droite est tracée sur ce même graphique.
4. À l'aide de ce modèle, estimons la population en 1871. Le rang de la décennie est 2. Remplaçons x par 2 dans l'équation de la droite. $y = 0,7 \times 2 + 35,9 = 37,3$.

   Selon ce modèle, nous pouvons estimer à 37,3 millions la population française en 1871.

Partie B : Évolution de la population après 1911.

1. Les données de l'INSEE (Institut National de la Statistique et des Études Économiques) montrent qu'en 1921 la population française était d'environ 39,2 millions de personnes.

   En 1921, le rang de la décennie est 7. $y = 0,7 \times 7 + 35,9 = 40,8$.

   Selon le modèle utilisé dans la partie A, nous pouvons estimer à 40,8 millions la population française en 1921.

   Ce modèle donne une évaluation un peu haute du résultat.

   Nous pouvons cependant estimer que le modèle permettait d'avoir une estimation proche du résultat (+4 %, ce qui paraît acceptable).
2. Sachant qu'en 2011 il y avait 65,2 millions d'habitants en France. En 2011, le rang de la décennie est 16. $y = 0,7 \times 16 + 35,9 = 47,1$.

   Selon le modèle utilisé dans la partie A, nous pouvons estimer à 47,1 millions la population française en 2011.

   Par conséquent, il apparaît que ce modèle ne reste plus valable jusqu'à nos jours. L'estimation minimise la population de près de dix-huit millions.

Partie C

1. Calculons le taux d'évolution global, exprimé en pourcentage et arrondi au centième, de la population française entre 1911 et 2011 (*les données se trouvent dans les deux premières parties*).

   Le taux t est défini par $\dfrac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}}$. $t = \dfrac{65,2 - 39,6}{39,6} \approx 0,646465$.

   Le taux d'évolution global de la population française entre 1911 et 2011 est, arrondi à 0, 1 % près, d'environ 64,6 %.

2. Soit t_m le taux d'évolution moyen durant cette période. Le coefficient multiplicateur global est d'une part 1,646 465 et $(1+t_m)^{100}$ d'autre part puisqu'il y a eu 100 évolutions durant cette période. D'où $t_m = 1{,}646465^{0{,}01} - 1 \approx 0{,}0049988$

   Le taux d'évolution annuel moyen pendant cette période arrondi à 0,1 % près est 0,5 %.

3. On souhaite utiliser ce taux moyen pour obtenir un autre modèle de la population.

   Soit (U_n)la suite géométrique de raison 1,005 et de premier terme $U_0 = 39,6$.

   a. Le terme général d'une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 est $u_n = u_0 q^n$. $U_n = 39{,}6 \times 1{,}005^n$.
   $U_3 = 39{,}6 \times 1{,}005^3 \approx 40{,}2$, $U_{100} = 39{,}6 \times 1{,}005^{100} \approx 65{,}2$ (*les résultats sont arrondis à* 0,1 *près*).

   b. Dans le cadre de l'exercice, donnons une représentation de U_3 et de U_{100}
   U_0 représentant la population en 2011, U_3 représente la population française en 2011+3 soit en 2014 et U_{100} celle en 2011.

EXERCICE 2 **(8 points)**

En 2016, une entreprise compte produire au plus 60 000 téléphones mobiles pour la France et les vendre 800 € l'unité. On supposera que tous les téléphones produits sont vendus. On s'intéressera dans cet exercice au bénéfice éventuel réalisé par l'entreprise.
Après plusieurs études, les coûts, en euros, liés à la production, à la distribution et à la publicité, sont modélisés par

$$C(x) = 0,01x^2 + 250x + 2500000$$

(où x est le nombre d'exemplaires fabriqués et vendus).

Partie A

1. Calculons le bénéfice, selon le nombre x d'exemplaires vendus, $x \in [0\ ;\ 60000]$.

   Le montant du bénéfice est le montant de la différence entre la recette et les coûts.

   $f(x) = 800x - (0,01x^2 + 250x + 2500000) = -0,01x^2 + 550x - 2500000$.

   Le bénéfice est bien défini sur $[0\ ;60000]$ par $f(x) = -0,01x^2 + 550x - 2500000$.

2. Déterminons la fonction f' dérivée de la fonction f.

   $f'(x) = -0,01(2x) + 550 = -0{,}02x + 550$.

3. Étudions le signe de $f'(x)$.

   Sur $\mathbb{R}$, $-0{,}02x + 550 > 0$ est équivalent à $x < 27500$. Par conséquent si $x \in [0\ ;\ 27500[$, $f'(x) > 0$ et si $x \in]27500\ ;\ 60000]$, $f'(x) < 0$.

   Étudions le sens de variation de f sur $[0\ ;\ 60000]$.

   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.

   Sur $[0\ ;\ 27500[$, $f'(x) > 0$ par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.

   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

   Sur $]27500\ ;\ 60000]$, $f'(x) < 0$ par conséquent f est strictement décroissante sur cet intervalle.

   Construisons le tableau de variation de f sur $[0\ ;\ 60000]$.

x	0		27500		60000
f'		+	0	−	
Variation de f	−2500000	↗	5062500	↘	−5500000

4. La fonction f admettant un maximum pour $x = 27500$, l'entreprise doit vendre 27 500 téléphones pour réaliser un bénéfice maximal. Ce bénéfice vaut 5 062 500 €.

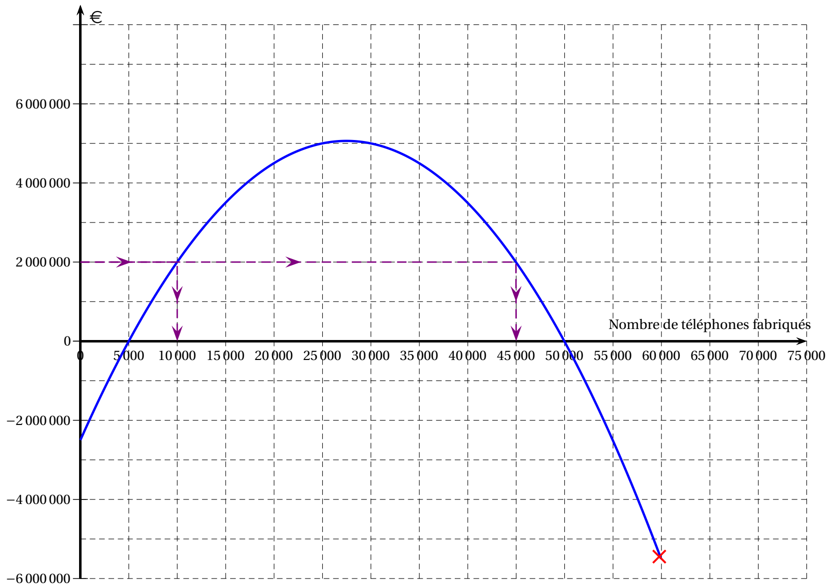
5. La fonction f est représentée ci-dessous.

a. Graphiquement l'entreprise doit vendre entre 10 000 et 45 000 téléphones (ces valeurs incluses) pour réaliser un bénéfice supérieur à 2 millions d'euros.

Nous traçons la droite d'équation $y = 2000000$ et nous lisons les abscisses des points d'intersection de cette droite avec la courbe.

b. L'entreprise n'a pas intérêt à produire 60000 exemplaires en 2016 puisque $f(60000) = -5500000$. Il en résulterait un bénéfice strictement négatif.

Graphiquement le point de la courbe d'abscisse 60 000 est situé dans le demi-plan des y négatifs.



Partie B

On s'intéresse dans cette partie au bénéfice unitaire qui est modélisé par la fonction g définie sur $]0\,;\,60000]$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

Sur un tableur, on a préparé une feuille de calcul dont on donne, ci-dessous, un aperçu :

	A	B	C
1	Nombre d'exemplaires x	Bénéfice $f(x)$	Bénéfice unitaire $g(x)$
2	1 000	−1 960 000	−1 960,00
3	2 000	−1 440 000	−720,00
4	3 000	−940 000	−313,33
5	4 000	−460 000	−115,00
6	5 000	0	0,00
7	6 000	440 000	73,33
8	7 000	860 000	122,86
9	8 000	1 260 000	157,50
10	9 000	1 640 000	182,22
11	10 000	2 000 000	200,00
12	11 000	2 340 000	212,73
13	12 000	2 660 000	221,67
14	13 000	2 960 000	227,69
15	14 000	3 240 000	231,43
16	15 000	3 500 000	233,33
17	16 000	3 740 000	233,75
18	17 000	3 960 000	232,94
19	18 000	4 160 000	231,11
20	19 000	4 340 000	228,42
21	20 000	4 500 000	225,00

1. Une formule que l'on peutsaisir en C2 pour obtenir, par recopie vers le bas, les valeurs du bénéfice unitaire est : =$B2/$A2

2. D'après le tableau, le nombre d'exemplaires, arrondi au millier, que l'entreprise doit fabriquer et vendre pour avoir un bénéfice unitaire maximal est de 16 000 téléphones.

Partie C

On modélise, par jour de production, le nombre d'appareils défectueux par la loi normale d'espérance $\mu = 14$ et d'écart type $\sigma = 2$. On arrondira les résultats au millième.

1. Calculons la probabilité pour qu'un jour donné, il y ait entre 12 et 16 téléphones défectueux.

   Soit X une variable aléatoire prenant pour valeur le nombre d'appareils défectueux. X suit la loi normale de paramètres(14 ; 2). La probabilité cherchée est $p(12 \leqslant X \leqslant 16)$.

   À la calculatrice, nous obtenons $p(12 \leqslant X \leqslant 16) \approx 0{,}683$.

2. On considère que la production d'une journée n'est pas satisfaisante quand il y a plus de 18 téléphones défectueux.

   La probabilité pour qu'un jour donné la production ne soit pas satisfaisante est $p(X \geqslant 18)$.

   À la calculatrice, nous obtenons $p(X \geqslant 18) \approx 0{,}023$.

EXERCICE 3 **(4 points)**

Cet exercice est un Questionnaire à Choix Multiple (QCM).
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Relever sur la copie le numéro de la question ainsi que la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée. Une réponse juste rapporte un point ; une réponse fausse ou l'absence de réponse n'enlève pas de point.

Dans une population, on estime qu'il naît 51 % de garçons et 49 % de filles.

1. L'intervalle de fluctuation à au moins 95 % de la fréquence des filles dans un échantillon de 100 naissances choisies au hasard sera :

   a. ~~[0,48 ; 0,50]~~ **b.** $\boxed{[0{,}39\,;\,0{,}59]}$ **c.** ~~[0,41 ; 0,61]~~ **d.** ~~[0,47 ; 0,51]~~

Dans cette même population si le premier enfant d'une famille est une fille, dans 75 % des cas il y a un deuxième enfant. Si le premier enfant est un garçon, il y a un deuxième enfant dans 20 % des cas.
On choisit, au hasard dans cette population, une famille ayant au moins un enfant.
On considère les évènements suivants :

F : « le premier enfant de cette famille est une fille »

D : « cette famille a eu un deuxième enfant »

2. On a :

a. $\boxed{P(D) = 0{,}4695}$ **b.** $\cancel{P(D) = 0{,}75}$ **c.** $\cancel{P(D) = 0{,}3675}$ **d.** $\cancel{P(D) = 0{,}53025}$

$p(D) = 0{,}49 \times 0{,}75 + 0{,}51 \times 0{,}2 = 0{,}4695$.

3. La probabilité que la famille choisie ait au moins deux enfants et que le premier soit une fille est :

a. $\cancel{0{,}1225}$ **b.** $\cancel{0{,}49}$ **c.** $\boxed{0{,}3675}$ **d.** $\cancel{1{,}24}$

$p(F \cap D) = 0{,}49 \times 0{,}75 = 0{,}3675$.

4. On choisit au hasard 5 familles parmi celles qui ont au moins un enfant. 0n appelle Y la variable aléatoire qui donne le nombre de ces familles ayant eu une fille en premier enfant.

On a alors :

a. $\cancel{P(Y = 2) = 10}$ **b.** $\boxed{P(Y = 2) \approx 0,32}$ **c.** $\cancel{P(Y = 2) = 0,98}$ **d.** $\cancel{P(Y = 2) = 0,16}$.

Y suit une loi de Bernoulli de paramètres (5 ; 0,49) donc $p(Y = 2) = \binom{5}{2}(0{,}51)^3(0{,}49)^2 \approx 0{,}318$.

Annexe de l'exercice 1 à rendre avec la copie