Corrigé du baccalauréat STMG Polynésie septembre 2019

EXERCICE 1 **4 points**

Un fermier possède des pommiers.
Les pommes de taille standard sont vendues sur le marché, les autres servent à faire des compotes.

Partie A

On considère que le diamètre, exprimé en cm, d'une pomme produite par l'un des pommiers du fermier suit la loi normale de moyenne $\mu = 6$ et d'écart type $\sigma = 0,7$.
Les pommes de taille standard, donc qui vont être vendues sur le marché, sont celles dont le diamètre est compris entre 5,3 cm et 6,7 cm.

1. La probabilité qu'une pomme soit vendue au marché est $P(5,3 \leqslant X \leqslant 6,7)$.
   $P(5,3 \leqslant X \leqslant 6,7) \approx 0,683$.
   Remarque $P(5,3 \leqslant X \leqslant 6,7) = P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma)$
2. La probabilité qu'une pomme serve à faire des compotes est la probabilité de l'événement contraire de l'événement : « être vendue au marché » d'où $1 - 0,683 = 0,317$.
   La probabilité qu'une pomme serve à faire des compotes est 0,317.

Partie B

Les pommes récoltées sont soit rouges, soit jaunes.
60 % des pommes récoltées sont rouges.
Parmi les pommes rouges, 80 % sont vendues au marché et les autres servent à faire des compotes.
Parmi les pommes jaunes, 50 % sont vendues au marché et les autres servent à faire des compotes.
On choisit une pomme au hasard parmi les pommes récoltées et on note :

— R l'évènement « la pomme est rouge »
— J l'évènement « la pomme est jaune »
— M l' évènement « la pomme est vendue sur le marché »
— C l' évènement « la pomme sert à faire des compotes »

1. L'arbre de probabilités est complété sur celui fourni en **annexe 1 à rendre avec la copie**.
2. **a.** Calculons $P(R \cap M)$. $P(R \cap M) = P(R) \times P_R(M) = 0,6 \times 0,8 = 0,48$.
   La probabilité qu'une pomme rouge soit mise sur le marché est de 0,48 soit un peu moins d'une pomme sur deux.
   b. Montrons que la probabilité qu'une pomme soit vendue au marché est de 68 %.
   R et J forment une partition de l'univers.
   $P(M) = P(R \cap M) + P(J \cap M) = P(R) \times P_R(M) + P(J) \times P_J(M)$.
   $P(M) = 0,60 \times 0,80 + 0,40 \times 0,50 = 0,68$.
   Cela correspond bien à la probabilité cherchée.
   c. Le résultat obtenu au **b.** est cohérent avec celui obtenu à la question **1.** de la partie A puisque dans les deux cas, nous observons une probabilité d'environ 0,68.
3. Un client vient d'acheter une pomme sur le marché.
   La probabilité que cette pomme soit rouge est notée $P_M(R)$. $P_M(R) = \dfrac{P(M \cap R)}{P(M)} = \dfrac{0,48}{0,68} \approx 0,706$

EXERCICE 2 **7 points**

En 2010, le maire d'une ville a fait comptabiliser le nombre de mégots ramassés dans la rue principale.
Sur l'ensemble de l'année, le nombre de mégots ramassés est de 20 000.
Souhaitant que ce nombre diminue fortement, le maire fait voter en conseil municipal une loi instaurant une amende de 160 € pour jet de mégot par terre.

Partie A

Des statisticiens ont prévu, sur une période de 10 ans, une diminution grâce à cette amende du nombre de mégots jetés par terre de 15 % par an.
Sous cette hypothèse, pour tout entier naturel n, on appelle u_n le nombre de mégots jetés par terre en l'année $2010+n$.
Ainsi, u_0 est le nombre de mégots jetés par terre en 2010. On a $u_0 = 20\,000$.

1. À un taux d'évolution de $-0,15$ correspond un coefficient multiplicateur de $1-0,15$ soit 0,85.
   $u_1 = 20\,000 \times 0,85 = 17\,000$.
   En 2011,selon ce modèle, le nombre de mégots jetés par terre fut de 17 000.
2. **a.** La suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,85 et de premier terme $u_0 = 20\,000$ puisque chaque terme se déduit du précédent en le multipliant par 0,85.
   b. Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est $u_n = u_0 \times (q)^n$.
   $u_n = 20\,000 \times (0,85)^n$.
   c. Le nombre de mégots qui, selon ce modèle, seraient jetés par terre en 2019 est u_9.
   $u_9 = 20\,000 \times (0,85)^9 \approx 4\,632$.
3. Le programme ci-dessous calcule le rang de la première année au cours de laquelle le nombre de mégots jetés par terre devient inférieur à 3 000.

$N \leftarrow 0$	ligne 1
$U \leftarrow 20000$	ligne 2
Tant que $U \geqslant 3000$	ligne 3
$\quad U \leftarrow 0,85U$	ligne 4
$\quad N \leftarrow N+1$	ligne 5
Fin du Tant que	ligne 6

   a. Complétons la ligne 4.
   b. La valeur de la variable N lorsque ce programme s'arrête est 12.
   Exécutons l'algorithme.

N	0	1	...	9	10	11	12	13
U	20 000	17 000	···	4 632	3 937	3 347	2 844	
U>3 000	Vrai	Vrai	···	Vrai	Vrai	Vrai	Faux	

Partie B

Le tableau ci-dessous donne les nombres de mégots qui ont réellement été ramassés dans la rue principale entre 2010 et 2018.

Année	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Rang x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de mégots ramassés y_i	20 000	17 384	14 817	12 569	10 721	9 142	8 458	7 673	6 691

1. **a.** Calculons le taux d'évolution global du nombre de mégots ramassés dans la rue principale entre 2010 et 2018.
   Le taux d'évolution $\mathcal{T}$ est défini par $\dfrac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}}$.
   $\mathcal{T} = \dfrac{6\,691 - 20\,000}{20\,000} \approx -0,66545$.
   Le taux global d'évolution du nombre de mégots ramassés dans la rue principale entre 2010 et 2018, exprimé en pourcentage et arrondi à 1 % est de 67 %.
   b. Calculons le taux d'évolution moyen du nombre de mégots ramassés dans la rue principale entre 2010 et 2018.
   En appelant t_m le taux moyen, le coefficient multiplicateur global est aussi $(1+t_m)^8$ car le nombre de mégots ramassés dans la rue principale a subi 8 évolutions durant cette période.
   $(1+t_m)^8 = \dfrac{6\,691}{20\,000} \approx 0,334\,55$, par conséquent $t_m = 0,334\,55^{\frac{1}{8}} - 1 \approx -0,1279$.
   Le taux d'évolution moyen annuel du nombre de mégots ramassés dans la rue principale entre 2010 et 2018 en pourcentage arrondi à l'entier le plus proche est égal à -13 %.

c. En supposant que le taux d'évolution entre 2018 et 2019 est de $-14\,\%$, calculons le nombre de mégots ramassés dans la rue principale en 2019.
À un taux d'évolution de $-0{,}14$ correspond un coefficient multiplicateur de $1-0,14$ soit 0,86.
Il serait ramassé, selon cette hypothèse, 5 754 mégots, en effet, $6691 \times 0{,}86 \approx 5754$.

2. Le nuage de points $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ a été représenté en **annexe 2 à rendre avec la copie**.

a. À l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement de ce nuage par la méthode des moindres carrés est $y = -1642x + 18507$. Les coefficients sont arrondis à l'entier.

b. On prend désormais comme droite d'ajustement la droite d d'équation : $y = -1600x + 18500$.
Cette droite est tracée sur l'**annexe 2 à rendre avec la copie**.

c. En supposant que cet ajustement demeure valable jusqu'en 2020, estimons le nombre de mégots ramassés en 2020.
En remplaçant x par 10, rang de 2020, dans l'équation de la droite, nous obtenons :
$y = -1600 \times 10 + 18500 = 2500$.

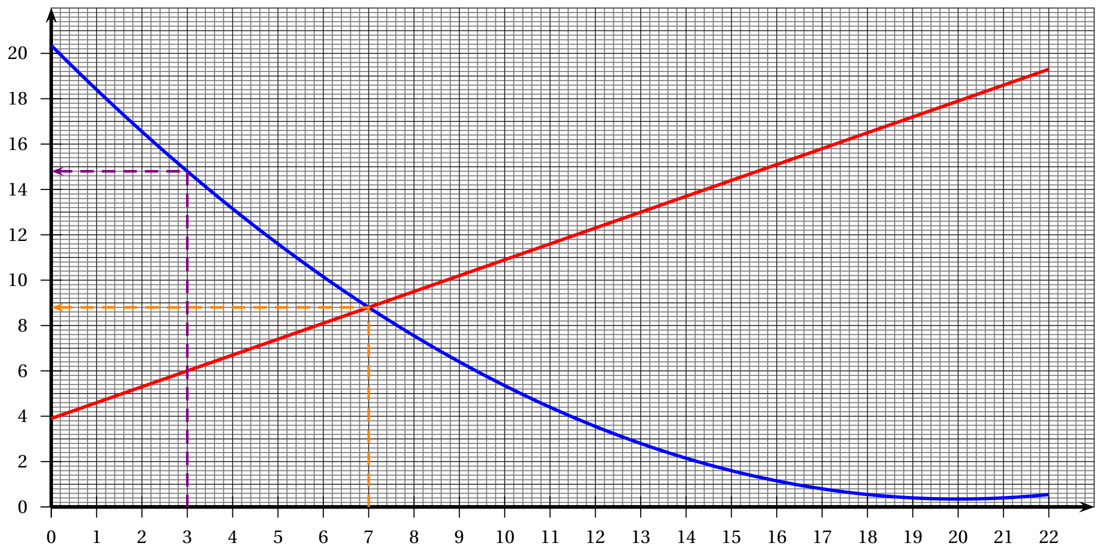
d. À l'aide du graphique, à partir de 2020 le nombre de mégots devrait être inférieur à 3 000.
Nous lisons pour abscisse du point de la droite d'ordonnée 3 000 environ 9,67.

EXERCICE 3 **5 points**

Soient les fonctions f et g définies sur $[0\,;\,22]$ par :

$$f(x) = 0,05x^2 - 2x + 20,35 \quad \text{et} \quad g(x) = 0,7x + 3,9.$$

Les deux fonctions sont représentées ci-dessous.



Partie A : lectures graphiques

1. Par lecture graphique, avec la précision permise par celui-ci, l'image de 3 par la fonction f est 14,8.

2. À l'aide du graphique, le point d'intersection des deux courbes a pour coordonnées $(7\,;\,8{,}8)$.

Partie B : calculs

1. **a.** Montrons que l'équation $f(x) = g(x)$ est équivalente à l'équation suivante

$$(E): \qquad 0,05x^2 - 2,7x + 16,45 = 0.$$

Formons l'équation aux abscisses des points d'intersection des deux courbes
$0{,}05x^2 - 2x + 20{,}35 = 0{,}7x + 3{,}9$
En regroupant dans le premier membre, nous obtenons $0{,}05x^2 - 2x - 0{,}7x + 20{,}35 - 3{,}9 = 0$
soit en réduisant $0{,}05x^2 - 2{,}7x + 16{,}45 = 0$
Par conséquent, $f(x) = g(x)$ si et seulement si $0{,}05x^2 - 2{,}7x + 16{,}45 = 0$

b. Résolvons l'équation (E). $0{,}05x^2 - 2{,}7x + 16{,}45$ est un trinôme du second degré
Calculons le discriminant
$\Delta = (2{,}7)^2 - 4 \times (0{,}05) \times (16{,}45) = 4 = 2^2$.
$\Delta > 0$, le trinôme a deux racines distinctes
$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $\quad x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_1 = \dfrac{2{,}7 - 2}{0{,}1} = \dfrac{0{,}7}{0{,}1} = 7$ $\quad x_2 = \dfrac{4{,}7}{0{,}1} = 47$ d'où
L'ensemble des solutions de (E) est $\{7\}$, f et g n'étant définies que sur $[0\,;22]$.

c. Déterminons les coordonnées du point d'intersection des deux courbes sur l'intervalle $[0\,;22]$.
$g(7) = 0{,}7 \times 7 + 3{,}9 = 8{,}8$. Les coordonnées du point d'intersection sont $(7~;~8{,}8)$.

2. **a.** Déterminons la fonction dérivée f' de la fonction f. $f'(x) = 0{,}05 \times (2x) - 2 = 0{,}1x - 2$ pour tout x appartenant à $[0\,;22]$.

b. Étudions le signe de la dérivée f' sur l'intervalle $[0\,;22]$.
Sur $\mathbb{R}$ $\quad 0{,}1\,x - 2 > 0 \iff x > 20$. Il en résulte si $x \in [0~;~20[$, $f'(x) < 0$ et si $x \in]20~;~22]$, $f'(x) > 0$.

c. Dressons le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;22]$.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur I.
Sur $[0~;~20[$, $f'(x) < 0$ par conséquent f est strictement décroissante sur cet intervalle.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors la fonction f est strictement croissante sur I.
Sur $]20~;~22]$, $f'(x) > 0$ par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.
Dressons le tableau de variation de f sur $[0\,;22]$

x	0		20		22
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de f	20,35	↘	0,35	↗	0,55

EXERCICE 4 **4 points**

Cet exercice est un Questionnaire à Choix Multiples (QCM).
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Recopier sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est attendue.
Une réponse juste rapporte 1 point; une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

1. Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison 7.
Le plus petit entier naturel n tel que u_n dépasse 50 est :

a. $\cancel{2}$ **b.** $\cancel{5}$ **c.** $\cancel{6}$ **d.** $\boxed{7}$

2. On considère la fonction g définie sur $[0\,;10]$ par $g(x) = \dfrac{3x}{x+1}$.
Une équation de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 1 est :

a. $\cancel{y = 3x}$ **b.** $\cancel{y = 3x - \dfrac{3}{2}}$ **c.** $\boxed{y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{3}{4}}$ **d.** $\cancel{y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{9}{4}}$.

3. Afin d'estimer la proportion d'adolescents français qui possèdent un smartphone, on interroge les 1 024 élèves d'un lycée. 840 élèves répondent qu'ils possèdent un smartphone.
Un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % de la proportion d'adolescents français qui possèdent un smartphone est :

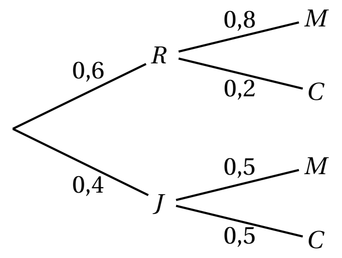
a. $\cancel{[0{,}820\,;0{,}822]}$ **b.** $\boxed{[0{,}789\,;0{,}852]}$ **c.** $\cancel{[0{,}819\,;0{,}821]}$ **d.** $\cancel{[0{,}919\,;0{,}981]}$

4. Pendant une période de soldes, le prix d'une tablette a subi deux démarques successives : une première baisse de 10 % puis une autre de 15 % pour afficher un prix final de 137,70 €. Le prix de cette tablette, en euros, avant le début des soldes était de :

a. $\cancel{105}$ **b.** $\cancel{142}$ **c.** $\cancel{174}$ **d.** $\boxed{180}$.

ANNEXES À RENDRE AVEC LA COPIE

ANNEXE 1 Exercice 1



ANNEXE 2 Exercice 2