∽ Corrigé du baccalauréat STMG Pondichéry 7 mai 2018 ∾

EXERCICE 1 **(5 points)**

Le tableau suivant donne le nombre d'abonnements à internet en très haut débit en France du premier trimestre 2015 au quatrième trimestre 2016.

Trimestre	T1 2015	T2 2015	T3 2015	T4 2015	T1 2016	T2 2016	T3 2016	T4 2016
Rang du trimestre x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Abonnements y_i (en millions)	3,56	3,63	3,88	4,3	4,5	4,77	5,04	5,43

Source : Arcep

Partie A - Modèle 1

1. À l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés est $y = 0{,}274x + 3{,}156$. *Les coefficients sont arrondis au millième.*
2. On décide de modéliser l'évolution du nombre d'abonnements y en fonction du rang x du trimestre par l'expression : $y = 0,27x + 3,16$.
   Sur la base de ce modèle, calculons le nombre d'abonnements prévu au deuxième trimestre de l'année 2018.
   Le deuxième trimestre de 2018 a pour rang 14. Remplaçons x par cette valeur dans l'équation de la droite.
   $y = 0{,}27 \times 14 + 3{,}16 = 6{,}94$
   Au deuxième trimestre 2018, nous pouvons estimer le nombre d'abonnements à internet en très haut débit à 6,94 millions.

Partie B - Modèle 2

Les données du tableau et celles publiées depuis permettent d'envisager que le nombre d'abonnements à internet en très haut débit en France pourrait continuer à augmenter de 6 % chaque trimestre, à partir de la fin de l'année 2016. On note u_n le nombre d'abonnements, en millions, à internet en très haut débit en France au bout de n trimestres. Ainsi $u_0 = 5,43$.

1. À une évolution de 6 % correspond un coefficient multiplicateur de 1,06. Calculons u_1,
   $u_1 = 5{,}43 \times 1{,}06 = 5{,}755\,8$. Arrondi au centième $u_1 \approx 5{,}76$.
2. La suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1,06 car chaque terme se déduit du précédent en le multipliant par un même nombre 1,06.
3. Exprimons u_n en fonction de n. Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est $u_n = u_0 q^n$. $u_n = 5{,}43\,(1{,}06)^n$
4. L'actualisation des données a révélé qu'au deuxième trimestre de 2017, le nombre d'abonnements s'élevait en réalité à 6,15 millions. Des deux modèles 1 et 2, lequel semble le plus adapté ? Pour ce faire, calculons le nombre d'abonnements à internet au très haut débit à cette date.
   modèle 1 : $y = 0{,}27 \times 10 + 3{,}16 = 5{,}86$.
   modèle 2 : $n = 2$ donc $u_2 = 5,43 \times (1,06)^2 \approx 6{,}10$.
   Le modèle le plus adapté semble le modèle 2, estimation plus proche de l'observation.
5. L'algorithme ci-dessous est destiné à estimer le nombre de trimestres nécessaires pour qu'au moins 10 millions de foyers soient connectés en très haut débit à internet.

```
n ← 0
u ← 5,43
Tant que u < 10
        u ← u × 1,06
        n ← n + 1
Fin Tant que
```

   La valeur de la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme est 11 en effet $u_{10} \approx 9{,}72$ et $u_{11} \approx 10,31$.

EXERCICE 2 (4 points)

Une agence de voyage a effectué un sondage auprès de ses clients pendant la période estivale.
Le sondage est effectué sur l'ensemble des clients. Ce sondage montre que :

— 38 % des clients voyagent en France;

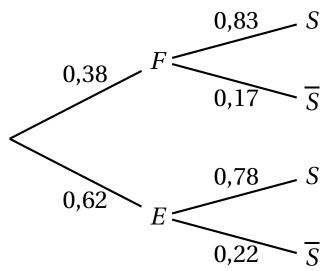
— 83 % des clients voyageant en France sont satisfaits;

— 78 % des clients voyageant à l'étranger sont satisfaits.

On interroge un client au hasard. On considère les évènements suivants :

- F : « le client a voyagé en France »;
- E : « le client a voyagé à l'étranger »;
- S : « le client est satisfait du voyage ».

1. Complétons l'arbre de probabilité ci-dessous.



2. $E \cap S$ est l'évènement : « Le client a voyagé à l'étranger et a été satisfait du voyage ». Calculons sa probabilité.
$P(E \cap S) = P(E) \times P_E(S) = 0{,}62 \times 0{,}78 = 0{,}4836$.

3. Montrons que $P(S) = 0,799$.
$P(S) = P(F \cap S) + P(E \cap S) = P(F) \times P_F(S) + P(E) \times P_E(S) = 0{,}38 \times 0{,}83 + 0{,}4836 =$
$0{,}3154 + 0{,}4836 = 0{,}799$

4. Sachant que le client est satisfait, la probabilité qu'il ait voyagé à l'étranger est notée $P_S(E)$.
$P_S(E) = \dfrac{P(E \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0{,}4836}{0{,}799} \approx 0,605$. *Le résultat a été arrondi au millième.*

EXERCICE 3 (4 points)

On s'intéresse à l'évolution du prix d'une matière première en euros par tonne depuis 2011. Le tableau ci-dessous donne le prix de cette matière première entre 2011 et 2016 avec 100 pour indice de base en 2011.
Dans ce tableau certaines données sont manquantes.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Année	2011	2012	2013	2014	2015	2016
2	Prix en €/tonne	248	188,5	237		167,5	189
3	Indice du prix (base 100 en 2011)	100	76	95,6	73,2	67,5	

1. Déterminons le taux d'évolution du prix entre 2015 et 2016.
Le taux d'évolution $\mathcal{T}$ est défini par $\dfrac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}}$. $\mathcal{T} = \dfrac{189 - 167{,}5}{167{,}5} \approx 0{,}1284$.
Le prix à la tonne a augmenté d'environ 12,84 % entre 2015 et 2016.

2. Calculons le prix en euros par tonne en 2014.
Le coefficient multiplicateur entre 2011 et 2014 est 0,732. Le prix, arrondi au dixième, en 2014 est donc 248 × 0,732 soit 181,50 €.

3. Calculons l'indice du prix en 2016.
L'indice du prix est $\dfrac{\text{valeur de la nouvelle année}}{\text{valeur de l'année de référence}} \times 100$. $I = \dfrac{189}{248} \times 100 \approx 76,2$.

4. La formule entrée dans la cellule C3 pour obtenir par recopie vers la droite les indices du prix est : =(C2*B3) / B2

5. Montrons que le taux d'évolution annuel moyen, arrondi à 0,01 %, entre 2011 et 2016 est $-5,29$ %.
En appelant t_m le taux moyen, le coefficient multiplicateur global est aussi $(1+t_m)^5$ puisque le prix d'une matière première a subi 5 évolutions durant cette période.
$(1+t_m)^5 = \dfrac{189}{248} = 0{,}762$ par conséquent $t_m = 0{,}762^{\frac{1}{5}} - 1 \approx -0{,}052\,887$.
Le taux d'évolution moyen arrondi à 0,01 %, entre 2011 et 2016 est bien de $-5{,}29$ %.

EXERCICE 4 (7 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Pour la fabrication de machines agricoles, une usine reçoit en grande quantité des plaques métalliques carrées. Elles ne peuvent être utilisées dans le processus de fabrication que si la longueur de leurs côtés et leur épaisseur respectent certains critères.

1. Un premier test permet de vérifier la longueur des côtés de chaque plaque. Une plaque réussit ce test si la longueur de ses côtés est comprise entre 81,6 centimètres et 82,4 centimètres.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque plaque prélevée au hasard, associe la longueur de son côté, en centimètres.
On admet que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance 82 et d'écart-type 0,2.
Déterminons la probabilité, arrondie au millième, qu'une plaque réussisse ce premier test.
$P(81,6 \leqslant X \leqslant 82,4) \approx 0{,}954$
remarque $81,4 = \mu - 2\sigma$ et $82,6 = \mu + 2\sigma$

2. Les plaques ayant réussi le premier test subissent un second test permettant de vérifier leur épaisseur. Une plaque sera utilisable par l'usine si son épaisseur est inférieure à 3 millimètres.
Le fournisseur affirme que 90 % des plaques qui subiront ce second test ont une épaisseur inférieure à 3 millimètres.
On effectue le second test sur un lot de 2 500 plaques.

a. Déterminons l'intervalle de fluctuation, à au moins 95 %, de la fréquence des plaques dont l'épaisseur est inférieure à 3 millimètres, dans ce lot.
$n = 2\,500 > 30$, $np = 2\,500 \times 0,9 = 2\,250 > 5$ $n(1-p) = 2\,500 \times 0,1 = 250 > 5$
$\left[0{,}9 - \dfrac{1}{\sqrt{2500}}\ ;\ 0{,}9 + \dfrac{1}{\sqrt{2500}}\right] \approx [0{,}88\ ;\ 0{,}92]$.
L'intervalle de fluctuation,à au moins 95 % est $[0{,}88\ ;\ 0{,}92]$

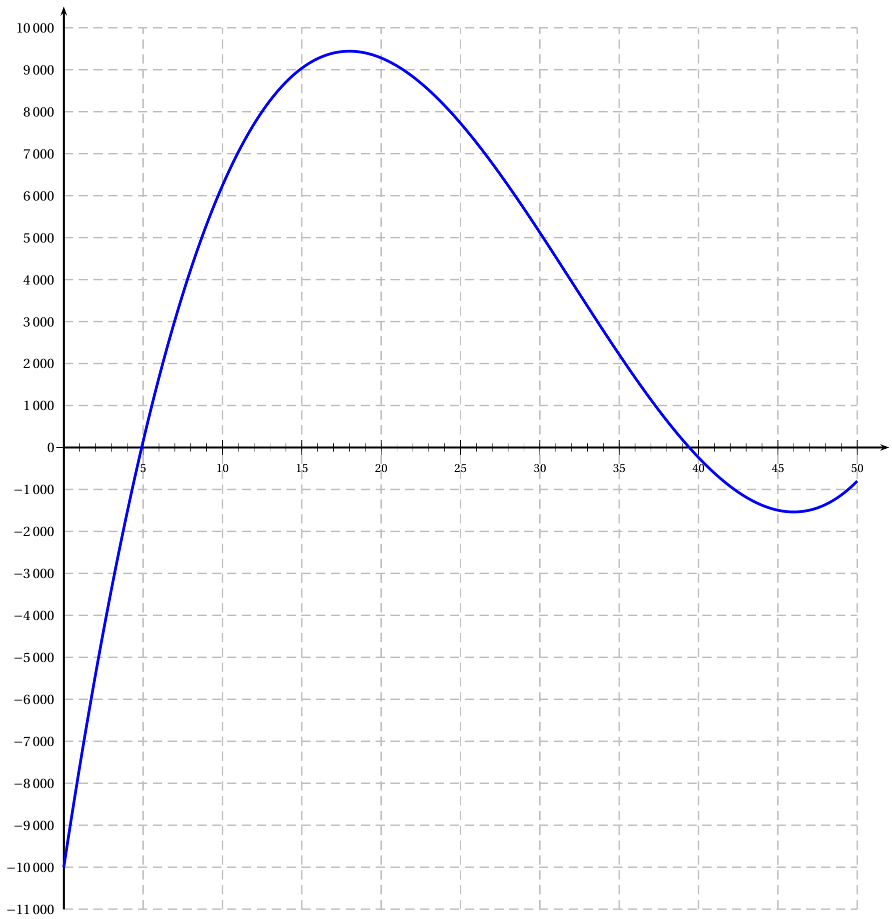
b. Parmi les 2 500 plaques, 2 274 ont réussi le second test.
La fréquence observée est $\dfrac{2\,274}{2\,500} \approx 0{,}9096$.
Au regard de ces résultats, nous devons accepter l'affirmation du fournisseur puisque cette valeur appartient à l'intervalle de fluctuation.

Partie B

Cette usine peut produire en un mois entre 0 et 50 machines agricoles.
On a modélisé le bénéfice de l'entreprise, exprimé en milliers d'euros, par la fonction f définie pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle [0; 50] par :

$$f(x) = x^3 - 96x^2 + 2484x - 10000.$$

On dit que l'entreprise réalise des profits si son bénéfice est strictement positif.
On a tracé la représentation graphique de cette fonction f.



1. Par lecture graphique, le nombre de machines agricoles que doit produire l'entreprise pour réaliser des profits appartient à]5 ; 39]. Nous lisons les abscisses des points pour lesquels la courbe est au dessus de l'axe des abscisses.
2. On désigne par f' la fonction dérivée de f. Calculons $f'(x)$.
   $f'(x) = 3x^2 - 96 \times 2x + 2484 = 3x^2 - 192x + 2484$.
3. Résolvons l'équation : $3x^2 - 192x + 2484 = 0$.
   La dérivée est un polynôme du second degré. Calculons le discriminant.
   $\Delta = (-192)^2 - 4 \times 3 \times 2484 = 7056.\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines :
   $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_1 = \dfrac{192-84}{2\times 3} = 18$ $\quad x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_1 = \dfrac{192+84}{6} = 46$.
   Les solutions de l'équation sont 18 et 46.
4. Étudions d'abord le signe de $f'(x)$.
   Un trinôme du second degré est, lorsque $\Delta > 0$, du signe de a (ici $a = 3$) par conséquent positif sauf pour les valeurs comprises entre les racines
   si $x \in [0 ; 18[\cup]46 ; 50]$, $f'(x) > 0$, si $x \in]18 ; 46[$, $f'(x) < 0$.
   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur I.
   Sur]18 ; 46[, $f'(x) < 0$ par conséquent f est strictement décroissante sur cet intervalle.
   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors la fonction f est strictement croissante sur I.
   Sur [0 ; 18[ou sur]46 ; 50], $f'(x) > 0$ par conséquent f est strictement croissante sur chacun de ces intervalles.
   Complétons le tableau de variations ci-dessous :

x	0		18		46		50
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	$-10\,000$	$\nearrow$	$9\,440$	$\searrow$	$-1\,536$	$\nearrow$	-800

5. À l'aide du tableau, le nombre de machines à fabriquer pour que le bénéfice soit maximal est 18.

Ce bénéfice maximal s'élève à 9 440 000 €.