Exercice 1 — 4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Pour chaque question, indiquer, sur la copie, le numéro de la question et la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
La réponse correcte à chacune des questions 1 et 2 rapporte un point et la réponse correcte à la question 3 rapporte 2 points.
Une réponse incorrecte, multiple ou une absence de réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

Un zoologiste étudie l'évolution de la population d'une espèce animale dans un secteur géographique délimité. Il a observé depuis 2010 que cette population diminue chaque année en moyenne de 5 %.

Le 1er mars 2018, la population compte 2 375 individus.

Le zoologiste émet l'hypothèse que cette baisse annuelle de 5 % va se poursuivre jusqu'en 2025.

1. Le nombre d'individus de la population au 1er mars 2022 est estimé, à la dizaine près, à :

a. 1 840 **b.** 1 930 **c.** 2 040 **d.** 2 890.

Solution : Explication non demandée mais donnée à titre indicatif

Une baisse de 5% est associée à un coefficient multiplicateur de 0,95.

Entre 2018 et 2022, on compte 4 années d'évolution donc le nombre d'individus en 2022 serait de $2375 \times 0{,}95^4 \approx 1930$.

2. Le nombre d'individus au 1er mars 2017 était de :

a. 2 300 **b.** 2 400 **c.** 2 500 **d.** 2 600.

Solution : Explication non demandée mais donnée à titre indicatif

1re méthode : puisqu'il y a eu une baisse de 5% entre 2017 et 2018, cela signifie que 2 375 représente 95% du nombre d'individus en 2017. On a alors un tableau de proportionnalité :

Année	2017	2018
Nb individus		2 375
pourcentage	100	95

Le nombre d'individus en 2017 était donc de $\dfrac{2375 \times 100}{95} = 2500$

2e méthode : le coefficient multiplicateur associé à la réciproque d'une baisse de 5 % est $C = \dfrac{1}{0{,}95}$. Le nombre d'individus en 2017 était donc de $2375 \times \dfrac{1}{0{,}95} = 2500$

3. Le zoologiste souhaite connaître l'année à partir de laquelle la population aura diminué de plus de 25 % par rapport à sa valeur de 2018.

Parmi les quatre algorithmes suivants, celui pour lequel le contenu de la variable n fournit, après exécution, l'information souhaitée est :

a.
```
n ← 2018
v ← 2375
Tant que v ⩾ 0,75 × v
v ← v − 0,05v
n ← n + 1
Fin Tant que
```

b.
```
n ← 2018
v ← 2375
Tant que v ⩾ 0,75 × 2375
v ← 0,95v
n ← n + 1
Fin Tant que
```

c.

$n \leftarrow 2018$
$v \leftarrow 2375$
Tant que $v \leqslant 0{,}75 \times 2375$
$v \leftarrow 0{,}95v$
$n \leftarrow n+1$
Fin Tant que

d.

$n \leftarrow 2018$
$v \leftarrow 2375$
Tant que $v \geqslant 0{,}75 \times 2375$
$v \leftarrow v - 0{,}05$
$n \leftarrow n+1$
Fin Tant que

Solution : Explication non demandée mais donnée à titre indicatif

Le zoologiste cherche à savoir à partir de quelle date la population (v dans l'algorithme) sera inférieure à 75% de ce qu'elle était en 2018. On calcule donc les termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q = 0{,}95$ tant que la population est supérieure à 75% de celle de 2017. Les algorithmes **a.**, **c.** et **d.** sont exclus pour les raisons suivantes :

Algorithme a. Il calcule les populations successives tant que pour une année donnée la population est supérieure à celle de l'année précédente or cela est toujours vrai ce qui signifie que l'algorithme ne sortira jamais de cette boucle.

Algorithme c. Il calcule les populations successives tant que pour une année donnée la population est inférieure à celle de l'année précédente or cela n'est jamais vrai ce qui signifie que l'algorithme ne va rien calculer et restera à l'année 2018.

Algorithme d. Dans chaque boucle, il enlève 0,05 à la population précédente, ce qui n'a aucun sens.

Exercice 2 — 5 points

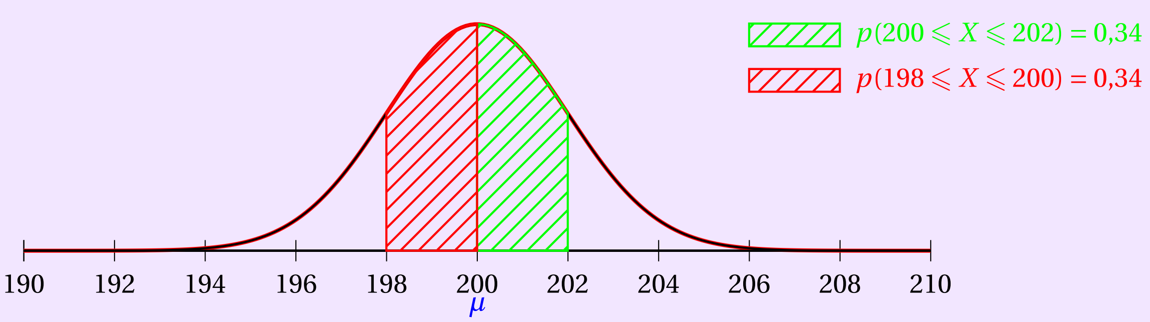
Les parties A et B sont indépendantes.

Une entreprise artisanale fabrique des tablettes de chocolat pâtissier pesant en moyenne 200 grammes.
Pour être commercialisable, une tablette doit peser entre 198 et 202 grammes.
Un contrôle de masse est effectué sur les tablettes fabriquées.
Celles qui ne sont pas commercialisables sont alors refondues.

PARTIE A

On modélise la masse d'une tablette (exprimée en gramme) par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 200$.
On sait que $P(198 \leqslant X \leqslant 200) = 0{,}34$.
Calculer la probabilité qu'une tablette soit commercialisable.

Solution :



La courbe de la fonction densité est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$.
On en déduit que $p(200 \leqslant X \leqslant 202) = p(198 \leqslant X \leqslant 200) = 0{,}34$.
La probabilité que la tablette soit commercialisable est :
$p(198 \leqslant X \leqslant 202) = p(198 \leqslant X \leqslant 200) + p(200 \leqslant X \leqslant 202) = 0{,}68$

PARTIE B

Afin d'améliorer la proportion de tablettes de chocolat commercialisables, le fabricant met en place une nouvelle chaîne de production.

L'ancienne chaîne ne prend désormais en charge que 40 % de la production totale.

À l'issue de la fabrication, un nouveau contrôle de masse est effectué.

- Parmi les tablettes produites par l'ancienne chaîne, 68 % sont commercialisables.
- Parmi les tablettes produites par la nouvelle chaîne, 90 % sont commercialisables.

On choisit, de façon équiprobable, une tablette dans l'ensemble de la production.

On note :

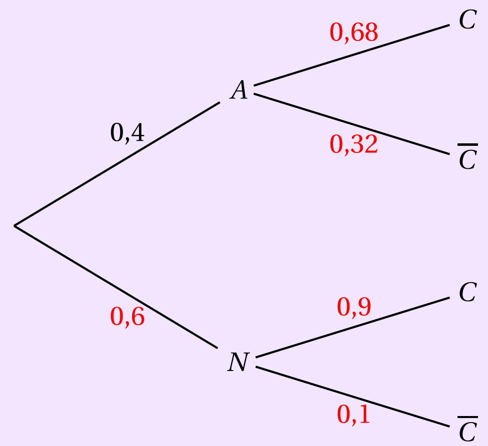
A l'évènement : « la tablette choisie est produite par l'ancienne chaîne » ;

N l'évènement : « la tablette choisie est produite par la nouvelle chaîne » ;

C l'évènement : « la tablette choisie est commercialisable ».

1. Compléter l'arbre pondéré donné en **annexe, à rendre avec la copie**.

Solution : L'énoncé donne $P(A) = 0{,}4$, $P_A(C) = 0{,}68$ et $P_N(C) = 0{,}9$



2. Calculer la probabilité que la tablette choisie provienne de l'ancienne chaîne et soit commercialisable.

Solution : On cherche $P(A \cap C)$

$P(A \cap C) = P(A) \times P_A(C) = 0{,}4 \times 0{,}68 = 0{,}272$

3. Peut-on affirmer qu'au moins 80 % de la production totale de tablettes est commercialisable ? Expliciter la démarche utilisée.

Solution : On veut savoir si $P(C) \geqslant 0{,}8$

A et N forment une partition de l'univers donc d'après les probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C \cap A) + P(C \cap N) \\ &= 0{,}272 + P(N) \times P_N(C) \\ &= 0{,}272 + 0{,}54 \\ &= 0{,}812 \geqslant 0{,}8. \end{aligned}$$

On peut donc affirmer qu'au moins 80 % de la production totale de tablettes est commercialisable.

EXERCICE 3 **6 points**

Le tableau ci-dessous, extrait d'une feuille automatisée de calcul, donne l'évolution de la fréquentation annuelle d'un parc de loisirs entre 2010 et 2017.

La plage de cellules C4 :I4 est au **format pourcentage, arrondi au centième**.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Année	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
2	Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
3	Nombre de visiteurs : y_i (en million)	1,47	1,49	1,60	1,74	1,91	2,10	2,20	2,26
4	Taux d'évolution annuel		1,36 %						

Partie A

1. Donner une formule qui, saisie dans la cellule C4, permet d'obtenir par recopie vers la droite les taux d'évolution annuels successifs de la ligne 4.

Solution : Les cellules de la ligne 4 étant déjà au format pourcentage, en C4 on entre la formule : « (C3−B3)/B3 ».

2. Calculer, au centième près, le taux d'évolution global du nombre de visiteurs du parc entre les années 2012 et 2015.

Solution :
Entre 2012 et 2015, le nombre de visiteurs est passé de 1,6 à 2,1 million soit un taux d'évolution de :
$\dfrac{2,1-1,6}{1,6} \times 100 = 31,25\,\%$ d'augmentation.

3. Calculer le taux d'évolution annuel moyen du nombre de visiteurs du parc entre 2012 et 2015. On donnera le résultat en pourcentage et arrondi au dixième.

Solution :
Le coefficient multiplicateur global associé à la hausse de 31,25% entre 2012 et 2015 est $C = 1,3125$.
Soit c le coefficient multiplicateur moyen durant ces 3 années alors on a $c^3 = C$.
$c^3 = C \iff c = C^{\frac{1}{3}} \approx 1,0949$.
Le taux d'évolution annuel moyen sur cette période est donc une hausse d'environ 9,49 %.

Partie B

On considère le nuage des points dont les coordonnées $(x_i\ ;\ y_i)$ figurent dans le tableau, de 2010 à 2017.

1. Pour ce nuage de points, donner une équation de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients seront arrondis au millième.

Solution : À l'aide de la calculatrice, a droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés a pour équation $y = 0,128x + 1,398$.

Pour la suite de l'exercice, on prendra comme droite d'ajustement la droite d'équation :

$$y = 0,13x + 1,40$$

2. Donner, à l'aide de cet ajustement, une estimation du nombre de visiteurs du parc de loisirs pour l'année 2019.

Solution : Le rang de l'année 2019 est $x = 9$. On remplace x par 9 dans l'équation de la droite et on trouve $y = 2,57$.
Cela signifie qu'en 2019, d'après ce modèle, le parc devrait compter environ 2,57 million de visiteurs.

3. Grâce à ce modèle, estimer l'année à partir de laquelle la fréquentation annuelle atteindra au moins 2 750 000 visiteurs.
Présenter la démarche utilisée.

Solution : On cherche à résoudre $y \geqslant 2{,}75$

$$\begin{aligned} y \geqslant 2{,}75 &\iff 0{,}13x + 1{,}4 \geqslant 2{,}75 \\ &\iff 0{,}13x \geqslant 1{,}45 \\ &\iff x \geqslant \frac{1{,}45}{0{,}13} \end{aligned}$$

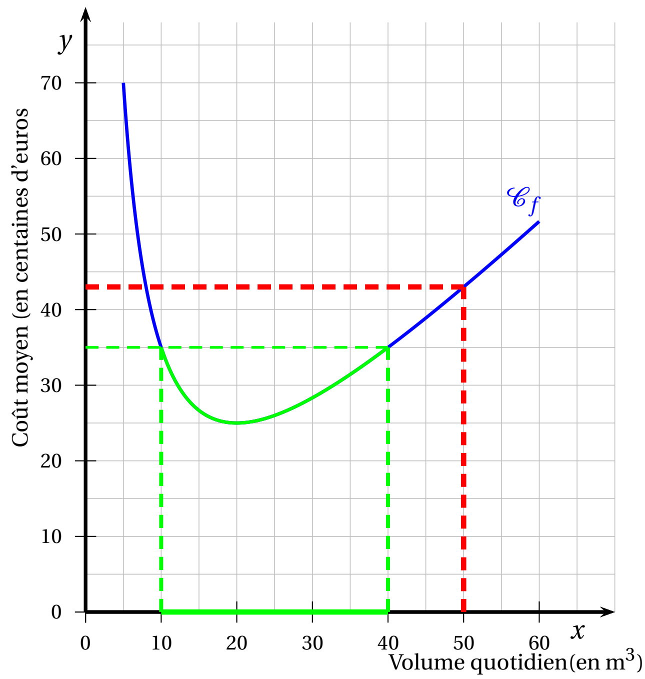
Or $\dfrac{1{,}45}{0{,}13} \approx 11{,}12$, on en déduit que l'objectif sera atteint à partir de la 12$^{\text{ème}}$ année après 2010 soit en 2022.

EXERCICE 4 **5 points**

Une entreprise fabrique un engrais biologique liquide.
Chaque jour, le volume d'engrais liquide fabriqué est compris entre $5\,\text{m}^3$ et $60\,\text{m}^3$.
Le coût moyen quotidien de production (exprimé en centaine d'euros) de cet engrais est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[5\,;\,60]$ par :

$$f(x) = x - 15 + \frac{400}{x}$$

où x est le volume quotidien d'engrais fabriqué, exprimé en m^3. La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est donnée dans le repère ci-dessous :



PARTIE A

1. Quel est le coût moyen quotidien pour la production de $50\,\text{m}^3$ d'engrais ?

Solution : $f(50) = 50 - 15 + \dfrac{400}{50} = 43$ donc le coût moyen quotidien pour la production de $50\,\text{m}^3$ d'engrais est de 4 300 €.

Remarque : on peut vérifier graphiquement la validité du calcul (pointillés rouges)

2. Quels volumes d'engrais faut-il fabriquer pour avoir un coût moyen quotidien de production inférieur ou égal à 3 500 € ?

Solution : On cherche à résoudre $f(x) \leqslant 35$

$$\begin{aligned} f(x) \leqslant 35 &\iff x - 15 + \frac{400}{x} \leqslant 35 \\ &\iff x + \frac{400}{x} - 50 \leqslant 0 \\ &\iff x^2 - 50x + 400 \leqslant 0 \end{aligned}$$

Étude de $x^2 - 50x + 400$:

$\Delta = b^2 - 4ac = 900 = 30^2 > 0$ donc l'équation $x^2 - 50x + 400 = 0$ admet 2 solutions $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 10 \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 40 \end{cases}$

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	5		10		40		60
$x^2 - 50x + 400$		+	0	-	0	+	

Il faut donc fabriquer entre $10\,\text{m}^3$ et $40\,\text{m}^3$ d'engrais pour que le coût moyen quotidien de production soit inférieur ou égal à 3 500 €

Remarque : on peut vérifier graphiquement la validité du calcul (pointillés verts)

PARTIE B

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[5\,;\,60]$. On note f' sa fonction dérivée.

1. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[5\,;\,60]$, $f'(x) = \dfrac{x^2 - 400}{x^2}$.

Solution : $f(x) = x - 15 + \dfrac{400}{x} = x - 15 + 400 \times \dfrac{1}{x}$ donc $f'(x) = 1 + 400 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 1 - \dfrac{400}{x^2} = \dfrac{x^2 - 400}{x^2}$

2. Étudier le signe de $x^2 - 400$, pour tout x appartenant à l'intervalle $[5\,;\,60]$.

Solution : $x^2 - 400 = x^2 - 20^2 = (x - 20)(x + 20)$. On en déduit le tableau de signes :

x	5		20		60
$x^2 - 400$		-	0	+	

3. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[5\,;\,60]$.

Solution : $f'(x) = \dfrac{x^2 - 400}{x^2}$ est du signe de $x^2 - 400$ sur $[5\,;\,60]$ car $x^2 > 0$, on en déduit les variations de f :

x	5		20		60
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	70	↘	25	↗	$f(60)$

4. Pour quel volume d'engrais fabriqué le coût moyen quotidien de production est-il minimal ? Quel est ce coût moyen minimal ?

Solution : Le coût moyen quotidien de production est minimal pour $20\,\text{m}^3$ d'engrais produit et ce coût est de 2 500 €.