☙ Corrigé du baccalauréat STMG Métropole septembre 2016 ❧

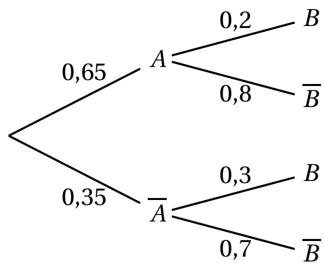
EXERCICE 1 **4 points**

Pour tout évènement E, on note $\overline{E}$ l'évènement contraire de E, $p(E)$ la probabilité de l'évènement E, et, si F est un évènement de probabilité non nulle, $P_F(E)$ la probabilité conditionnelle de E sachant F.
Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. On considère l'arbre de probabilité ci-contre.

   Affirmation 1 : La probabilité conditionnelle de B sachant A est égale à 0,2
   vraie car la somme des probabilités issues d'un même sommet est égale à 1
   $0,8+0,2=1$

   Affirmation 2 : La probabilité de B est égale à 0,5.
   fausse car $p(B)=p(A\cap B)+p(\overline{A}\cap B)$
   $p(B)=0,65\times 0,2+0,35\times 0,3=0,235$.

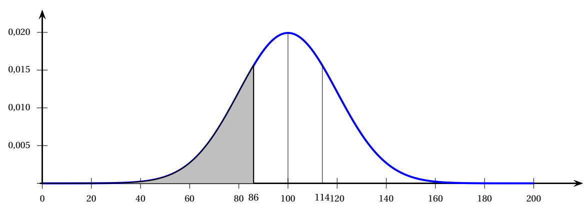


2. Un institut de sondage affirme que 56 % des Français écoutent de la musique classique, au moins de temps en temps. On interroge 200 Français, et parmi eux 140 déclarent écouter de la musique classique de temps en temps.

   Affirmation 3 : On peut rejeter, avec un risque d'erreur inférieur à 5 %, le résultat donné par l'institut de sondage.

   vraie : l'intervalle de confiance est $\left[0,56-\frac{1}{\sqrt{200}}\ ;\ 0,56+\frac{1}{\sqrt{200}}\right]=[0,489\ ;\ 0,63]$. La proportion $\frac{140}{200}$ soit 0.7 n'appartient pas à cet intervalle.

3. La courbe de densité d'une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance μ= 100 et d'écart-type $\sigma=20$ est donnée ci-dessous. La valeur de l'aire de la surface grisée est de 0,242.



   Affirmation 4 : La probabilité que X soit comprise entre 86 et 114 est égale à 0,758.

   fausse : $86=100-14$ et $114=100+14$. Vu la symétrie de la courbe $p(X\leqslant 86)=p(X\geqslant 114)$ par conséquent $p(86\leqslant x\leqslant 114)=1-2\times 0,242=0,516$.

EXERCICE 2 **5 points**

Les grands-parents d'Inès décident de lui ouvrir un compte épargne le 1^er^ janvier 2016.
Une première banque leur propose un taux annuel de 1,5 %, à intérêts composés, pour un dépôt initial de 2 000 €. On rappelle qu'un capital produit des intérêts composés si, à la fin de chaque année, les intérêts générés sont ajoutés au capital pour produire de nouveaux intérêts.
Pour tout entier n, on note u_n le capital, exprimé en euro, disponible le 1er janvier de l'année $2016+n$. Ainsi $u_0=2000$.

1. À un taux d'évolution de 1,5 % correspond un coefficient multiplicateur de $1+\frac{1,5}{100}$ soit 1,015.
   $u_1=2000\times 1,015=2030$ $\quad u_2=2030\times 1,015=2060,45$.
2. **a.** Il en résulte aussi que $u_{n+1}=1,015u_n$.

   b. Passant d'un terme au suivant en le multipliant par un même nombre 1,015, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1,015 et de premier terme 2 000.

c. Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est $u_n = u_0 q^n$.
$u_n = 2000 \times (1{,}015)^n$.

3. On considère l'algorithme ci–dessous :

Variables	k est un nombre entier u est un nombre réel
Initialisation	k prend la valeur 0 u prend la valeur 2 000

Traitement	Tant que $u < 2250$
	Faire
	   u prend la valeur $u \times 1{,}015$
	   k prend la valeur $k+1$
	Fin Tant que

Sortie	Afficher k

a. La valeur en sortie de cet algorithme correspond au plus petit entier k pour lequel le terme correspondant de la suite sera supérieur ou égal à 2 250

b. À l'aide de la calculatrice, cette valeur est 8. En effet $u_7 \approx 2219{,}69 \quad u_8 \approx 2252{,}99$.

4. Une autre banque propose aux grands parents d'Inès 32 € d'intérêts simples annuels pour un dépôt initial de 2 000 €. On rappelle qu'un capital produit des intérêts simples si les intérêts sont uniquement calculés sur ce capital.

Considérons la suite (v_n) modélisant ce nouveau placement. Nous avons $v_n = 2000 + 32n$, la suite étant arithmétique puisque la différence entre deux termes consécutifs est constante et vaut 32. Nous cherchons n de telle sorte que $v_n > u_n$.

En utilisant la table de la calculatrice, nous obtenons $u_9 \approx 2286{,}78 \quad v_9 = 2288$.

$u_{10} \approx 2321{,}08 \quad v_{10} = 2320$.

Pendant dix ans, à partir de 2016, ce nouveau placement est plus avantageux que le précédent. Il l'est strictement du premier janvier 2017 jusqu'au premier janvier 2026.

EXERCICE 3 **5 points**

Le tableau ci-dessous, extrait d'une feuille de calcul, donne l'évolution de la population française, de 2006 à 2014.
La ligne 4 est au format pourcentage.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Année	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
2	Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
3	Population (en millier) : y_i	63 186	63 601	63 962	64 305	64 613	64 933	65 241	65 921	
4	Taux d'évolution entre deux années consécutives (en pourcentage)		0,66 %		0,54 %	0,48 %	0,50 %	0,47 %	1,04 %	0,42 %

Sources : INSEE et banque mondiale

Le nuage de points de coordonnées $(x_i ; y_i)$ pour i variant de 0 à 8, est donné en **annexe 1, à rendre avec la copie**.

Partie A

1. Une formule qui, entrée en cellule C4, permet par recopie vers la droite d'obtenir les taux d'évolution annuels successifs jusqu'en 2014 est =(C$3-B$3)/B$3.

2. En appliquant cette formule, la valeur contenue dans la cellule D4 est 0,57 % $((63962 - 63601)/63601)$
et dans la cellule J3 : 66 198 $((x - 65921)/65921 = 0{,}0042)$.

3. Calculons le taux d'évolution moyen annuel entre 2006 et 2014 de la population française.
En appelant t_m le taux moyen, le coefficient multiplicateur global est aussi $(1+t_m)^8$ puisque l'effectif de la population française a subi 8 évolutions durant cette période.

$(1+t_m)^8 = \dfrac{66198}{63186} \approx 1{,}0476688$ par conséquent $t_m = 1{,}0476688^{\frac{1}{8}} - 1 \approx 0{,}005838$.

Le taux annuel moyen d'évolution de la population française entre 2006 et 2014, arrondi à 0,01 %, est d'environ 0,58 %.

Partie B

1. À l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés est $y = 369{,}9x + 63\,182{,}6$, Les coefficients étant arrondis au dixième.
2. Pour estimer la population française dans les années à venir, on décide d'ajuster ce nuage de points par la droite D d'équation $y = 370x + 63\,183$.

   Cette droite est tracée sur le graphique figurant en **annexe 1**.
3. Par lecture graphique, une estimation de la population française en 2020 est68 400. Nous lisons l'ordonnée du point de la droite d'abscisse 14.
4. Selon une étude, la population française dépassera les 70 millions en 2030.

   En considérant que le modèle reste encore valable en 2030, la population serait alors en millier de 72 063 soit environ un peu plus de 72 millions.

   En effet en 2030 $x = 24$ et $y = 370 \times 24 + 63\,183 = 72\,063$. Nous pouvons donc penser que cette estimation est réaliste.

EXERCICE 4 **6 points**

Une entreprise peut produire quotidiennement entre 1 et 20 tonnes de peinture.
Le coût de production, en millier d'euros, de x tonnes de peinture est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[1\,;20]$ par : $C(x) = 0,05x^2 - 0,1x + 2,45$.
L'entreprise fixe le prix de vente d'une tonne de peinture à 670 €.

Partie A

On a représenté, dans l'**annexe 2**, la courbe Γ représentant le coût de production dans un repère orthogonal du plan.

1. Le coût correspondant à une fabrication quotidienne de 9,5 tonnes de peinture est $C(9{,}5)$ soit
   $0,05 \times 9{,}5^2 - 0,1 \times 9{,}5 + 2,45 = 6{,}0125$.

   Le coût de fabrication de 9,5 tonnes de peinture s'élève à 6 012,5 €.
2. Déterminons la production quotidienne correspondant à un coût de fabrication de 16 000€. Pour ce faire, résolvons $0,05x^2 - 0,1x + 2,45 = 16$ ou $x^2 - 2x - 271 = 0$. Nous avons un trinôme du second degré, calculons Δ.

   $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-271) = 4 + 1\,084 = 1\,088$. $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines distinctes :

   $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

   $x_1 = \dfrac{-(-2) - \sqrt{1\,088}}{2} = \dfrac{2 - 2\sqrt{272}}{2} = 1 - \sqrt{272} \approx -15{,}49$; $x_2 = 1 + \sqrt{272} \approx 17{,}49$.

   Pour un coût de 16 000 euros, l'entreprise pourra fabriquer environ 17,49 t de peinture.
3. **a.** Construisons, dans le repère de l'**annexe 2**, la courbe représentant la recette correspondant à la vente de x tonnes de peinture, pour $x \in [1\,;\,20]$ c'est-à dire la droite d'équation $y = 0{,}67x$ restreinte à l'intervalle $[1\,;20]$.

   b. L'entreprise réalise un bénéfice lorsque la courbe représentant les recettes est « au-dessus » de la courbe représentant les coûts. Par lecture graphique et avec la précision permise par celui-ci, l'ensemble des valeurs de la production quotidienne appartient à l'intervalle $[4{,}5\,; 10{,}9]$.

Partie B

Pour une production de x tonnes de peinture, on appelle coût unitaire, le coût $f(x)$, auquel revient alors la production d'une tonne de peinture.

1. Sachant que, pour tout $x \in [1\,;\,20]$, $f(x) = \frac{C(x)}{x}$, vérifions que $f(x) = 0{,}05x - 0,1 + \frac{2{,}45}{x}$.

   $f(x) = \dfrac{0{,}05x^2 - 0,1x + 2,45}{x} = \dfrac{0{,}05x^2}{x} - \dfrac{0{,}1x}{x} + \dfrac{2{,}45}{x} = 0{,}05x - 0{,}1 + \dfrac{2{,}45}{x}$. La relation est vraie.
2. On note f' la dérivée de f.

   $f'(x) = 0{,}05(1) + 2{,}45 \times \dfrac{-1}{x^2} = 0{,}05 - \dfrac{2{,}45}{x^2} = \dfrac{0{,}05x^2 - 2{,}45}{x^2} = \dfrac{0{,}05(x^2 - 49)}{x^2}$

   Nous avons montré que, pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;20]$, $f'(x) = \dfrac{0{,}05(x^2 - 49)}{x^2}$.
3. Déterminons le signe de $f'(x)$ pour $x \in [1\,;\,20]$

   Nous pouvons écrire aussi $f'(x) = \dfrac{0{,}05(x+7)(x-7)}{x^2}$. Or sur $[1\,;20]$ $\dfrac{0{,}05(x+7)}{x^2} > 0$, par conséquent le signe de $f'(x)$ est celui de $x - 7$.

   Sur $\mathbb{R}$, $x - 7 > 0 \iff x > 7$. Par conséquent si $x \in [1\,;\,7[$, $f'(x) < 0$ et si $x \in]7\,;\,20]$, $f'(x) > 0$

   Étudions le sens de variation de f.

   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

   Sur $[1\,;\,7[$, $f'(x) < 0$ par conséquent f est strictement décroissante sur cet intervalle.

   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.

   Sur $]7\,;\,20]$, $f'(x) > 0$ par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.

   Construisons le tableau de variation de f sur $[1\,;20]$.

x	0		7		20
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de f	2,4		0,6		1,0225

.

4. **a.** La fonction f admet un minimum en $x = 7$ par conséquent la quantité de peinture que doit produire l'entreprise pour que le coût unitaire soit minimal est de 7 tonnes.

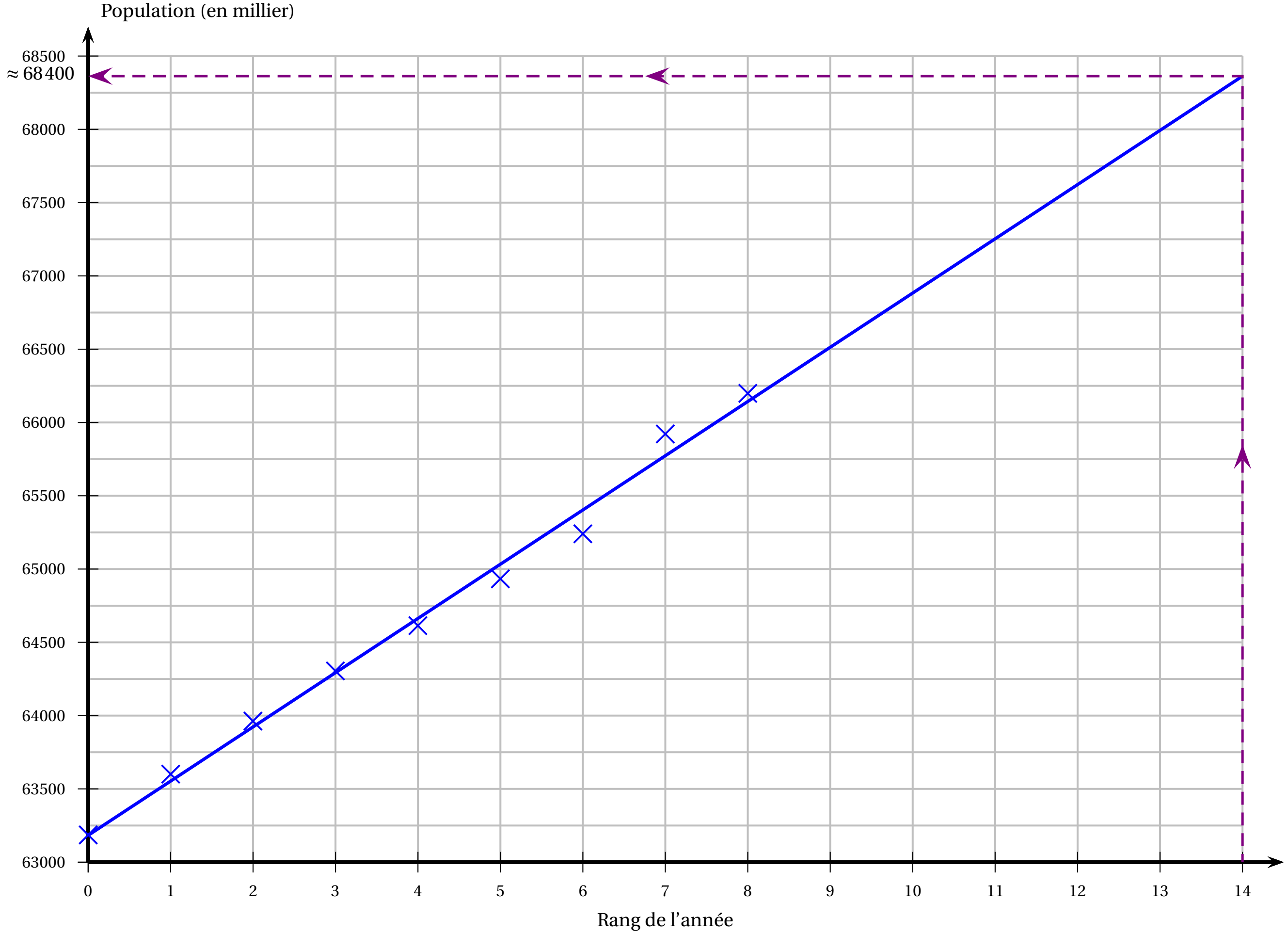
b. Ce coût unitaire minimal s'élève en millier d'euros à 0,6 par conséquent le coût unitaire minimal est de 600 €.

c. Le bénéfice réalisé par l'entreprise est de 670-600 soit 70 €, pour chaque tonne fabriquée dans ces conditions. Le bénéfice réalisé lors de la fabrication des sept tonnes est 7×70 soit 490 €.

5. La valeur trouvée à la question **4. c.** n'est pas le bénéfice maximal que l'entreprise peut réaliser.
Le bénéfice est $0{,}67 - (0,05x^2 - 0,1x + 2,45)$ soit $-0{,}05x^2 + 0{,}77x - 2{,}45$.
En étudiant la fonction B définie sur $[1\,;\,20]$ par $x \mapsto -0{,}05x^2 + 0{,}77x - 2{,}45$, nous pouvons montrer que le bénéfice maximal est obtenu pour une fabrication de 7,7 t. Le bénéfice maximal en millier d'euros est $B(7{,}7)$ soit 514,5 €.

Annexe 1 (à rendre avec la copie)

EXERCICE 3 - Partie B



Annexe 2 (à rendre avec la copie)