

◌ Baccalauréat Amérique du Sud série S ◌
novembre 2003

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

1. Les jetons étant indiscernables, la probabilité de tirer l'un quelconque d'entre eux est égale à

- $\frac{1}{4}$ pour -1 ;
- $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ pour 0 ;
- $\frac{1}{4}$ pour 1 ;

Puisque l'on tire les trois coordonnées la probabilité que le point M soit en A est égale à celle d'obtenir le triplet $(1; -1; -1)$, soit $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$.

2. Les tirages conduisant à E_1 sont de la forme $(a; 0; 0)$ avec a quelconque.

$$\text{On a donc } p(E_1) = 1 \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{4}.$$

3. a. On sait qu'une équation de \mathcal{P} est de la forme $1x+1y+1z+d=0$ et comme $O \in \mathcal{P}$, on en déduit que $d=0$.

$$M(x; y; z) \in \mathcal{P} \iff x+y+z=0.$$

- b. Voir la figure à la fin.

- c. Il faut chercher les tirages $(x; y; z)$ tels que $x+y+z=0$. Sur les 27 tirages possibles :

- si $x = -1$, il faut $y = 1$ et $z = 0$ ou inversement soit $(-1; 1; 0)$ et $(-1; 0; 1)$;
- si $x = 0$, on peut avoir $y = 0$ et alors $z = 0$, sinon $y = 1$ et $z = -1$ ou inversement soit les trois tirages $(0; 0; 0)$, $(0; 1; -1)$ et $(0; -1; 1)$;
- si $x = 1$ il faut que l'un des autres tirages soit -1 et le dernier 0 , soit les deux tirages $(1; 0; -1)$ et $(1; -1; 0)$.

$$\text{On a donc } p(E_2) = 6 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{16} + \frac{1}{8} = \frac{3+2}{16} = \frac{5}{16}.$$

4. Parmi les 27 points de la figure, seuls les sommets du cube sont à une distance $\sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3} > 1,5$.

Comme il y a 8 sommets, la probabilité de l'évènement $\overline{E_3}$ est égale à

$$8 \times \frac{1}{64} = \frac{1}{8}, \text{ d'où } p(E_3) = 1 - p(\overline{E_3}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

EXERCICE 2

5 points

Enseignement obligatoire

Partie I

1. Le centre Ω du cercle \mathcal{C} a pour affixe $\frac{1}{2}$ qui est donc le rayon du cercle.

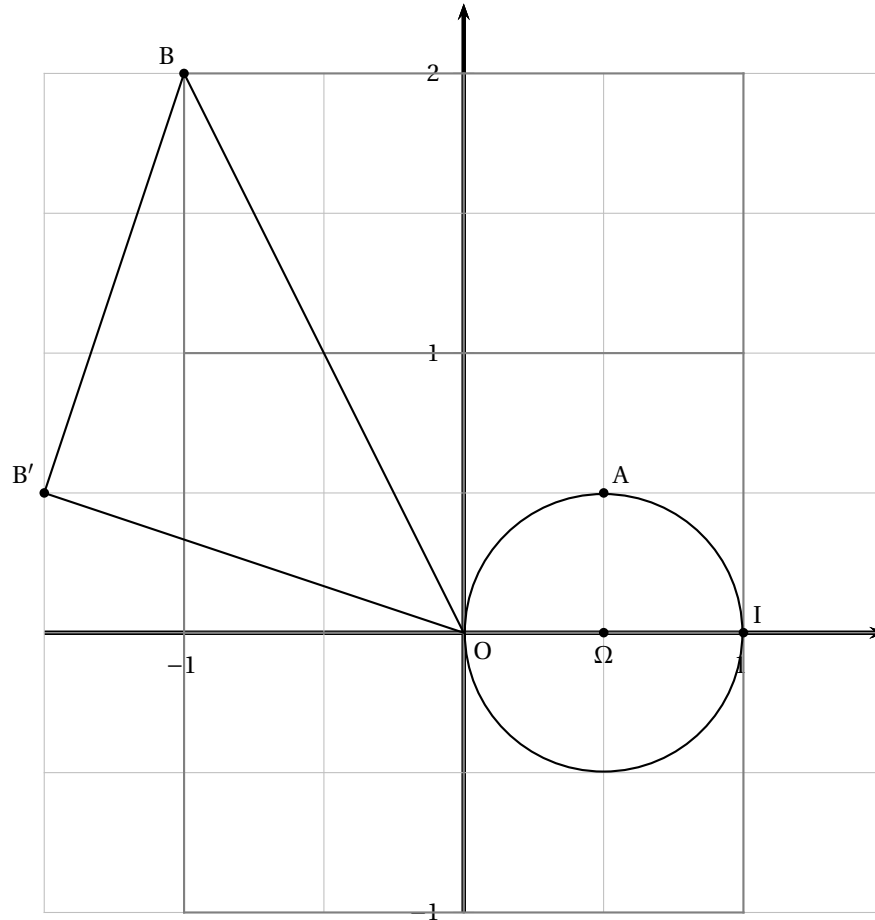
$$A_0 \text{ appartient au cercle } \mathcal{C} \text{ si et seulement si } A_0\Omega = \frac{1}{2} \iff |\omega - a_0| = \frac{1}{2} \iff$$

$$\left| \frac{1}{2}i \right| = \frac{1}{2} \text{ qui est bien vraie.}$$

a. $b' = a_0b = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)(-1 + 2i) = -\frac{1}{2} - 1 + i\left(1 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i.$

b. On a $\arg \frac{0-b'}{b-b'} = \arg \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i}{-1 + 2i + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i} = \arg \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i}{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i} = \arg \frac{3-i}{1+3i} =$
 $\arg \frac{(3-i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \arg \frac{-10i}{10} = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi].$

Ceci montre que $(\vec{B'B}, \vec{B'O}) = -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$, c'est-à-dire que le triangle OBB' est rectangle en B' .



Partie II

1. a. Comme $a \neq 0$ et $a \neq 1$, le quotient $\frac{a-1}{a}$ existe et est non nul. On sait que

$$\frac{a-1}{a} = \arg \left(\frac{\vec{OA}}{\vec{IA}}, \vec{OA}, \vec{IA} \right) \quad [2\pi] \quad \text{Comme } z \neq 0, (\vec{M'O}, \vec{M'M}) =$$

$$\arg \left(\frac{z-az}{0-az} \right) \quad [2\pi] = \arg \left(\frac{1-a}{-a} \right) \quad [2\pi] = \arg \left(\frac{a-1}{a} \right) \quad [2\pi].$$

- b. Le triangle OMM' est rectangle en M' si et seulement si

$$(\vec{M'O}, \vec{M'M}) = \frac{\pi}{2} \quad [\pi] \iff \arg \left(\frac{a-1}{a} \right) \quad [2\pi] = \frac{\pi}{2} \quad [\pi].$$

Donc OMM' est rectangle en M' si et seulement si $(\vec{OA}, \vec{IA}) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \iff$

$$(\vec{AO}, \vec{AI}) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi].$$

Finalement OMM' est rectangle en M' si et seulement si A appartient au cercle de diamètre [AI] exceptés les points O et I.

$$2. \text{ Calculons } (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'}) = \arg\left(\frac{ax-0}{a-0}\right) = \arg x \quad [2\pi] = 0 \quad [2\pi].$$

Ceci montre que les points O, A et M' sont alignés.

D'après la question précédente le triangle OMM' est rectangle en M' . Donc (MM') est perpendiculaire à la droite (OM') ou encore à la droite (OA) : M' est donc le projeté orthogonal de M sur la droite (OA) .

EXERCICE 2**5 points****Enseignement de spécialité****Partie A**

1. 3 divise $5(15-x)$ et est premier avec 5 : il divise donc $15-x$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $15-x = 3k \iff x = 15-3k$.

En reportant dans l'équation initiale : $3y = 5 \times 3k \iff y = 5k$.

Les solutions de l'équation dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sont les couples $[(15-3k); 5k]$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Après p rotations r_1 et q rotations r_2 , le point A a parcouru $\frac{p\pi}{3} + \frac{q\pi}{5}$ (cm). Il faut donc résoudre dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, l'équation :

$$\frac{p\pi}{3} + \frac{q\pi}{5} = 2,5 \times 2\pi \times 1 \iff 5p + 3q = 75$$

Cette équation peut s'écrire : $3q = 75 - 5p \iff 3q = 5(25 - p)$.

Donc d'après la question précédente les couples solutions sont de la forme $(15-3k; 5k)$, $k \in \mathbb{N}$.

Or $15-3k \geq 0 \iff k \leq 5$ et $5k \geq 0 \iff k \geq 0$. Donc $k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.
Ce qui donne les couples :

$$(15; 0), (12; 5), (9; 10), (6; 15), (3; 20), (0; 25)$$

Partie B

1. s_1 composée d'une homothétie et d'une rotation de même centre est une similitude de centre O, de rapport 4 et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

s_2 composée d'une rotation et d'une homothétie de même centre est une similitude de centre O, d'angle $\frac{\pi}{5} + \pi = \frac{6\pi}{5}$ et de rapport 6.

2. a. S_m composée de m similitudes de même centre est une similitude de centre O de rapport 4^m et d'angle $m \times \frac{\pi}{3}$;

S_n composée de n similitudes de même centre est une similitude de centre O de rapport $(6)^n$ et d'angle $n \times \frac{6\pi}{5}$ f composée de similitudes de même centre est une similitude de centre O, de rapport $4^m \times (-6)^n$ et d'angle $m \times \frac{\pi}{3} + n \times \frac{6\pi}{5}$.

$$\text{Or } 4^m \times (6)^n = (2^2)^m \times [2 \times 3]^n = 2^{2m} \times 2^n \times 3^n = 2^{2m+n} \times 3^n.$$

- b. On sait que $144 = 12^2 = (2^2 \times 3)^2 = 2^4 \times 3^2$.

f est une homothétie de rapport 144 si et seulement si $\begin{cases} 2m+n & = & 4 \\ n & = & 2 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} m & = & 1 \\ n & = & 2 \end{cases}$$

Dans ce cas l'angle de f serait égal à : $\frac{\pi}{3} + 2 \times \frac{6\pi}{5} = \frac{5\pi + 36\pi}{15} =$

$$\frac{41\pi}{15} \neq 0 \quad [\pi].$$

Conclusion f ne peut avoir un rapport de 144.

- c. On a $OM = 6$, donc le rapport de f serait égal à $\frac{240}{6} = 40 = 2^3 \times 5$. Ceci n'est pas possible puisque le rapport de f soit $2^{2m+n} \times 3^n$ n'est pas multiple de 5.

De même $OM = 6$ et $OM' = 576$ entraîne que le rapport de f serait égal à

$$\frac{576}{6} = 96 = 2^5 \times 3^1 \Rightarrow \begin{cases} 2m+n = 5 \\ n = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} m = 2 \\ n = 1 \end{cases}$$

Conclusion : $OM' = 576$ si et seulement si $m = 2$ et $n = 1$.

L'angle de f serait alors égal à $\frac{2\pi}{3} + \frac{6\pi}{5} = \frac{28\pi}{15}$.

PROBLÈME

11 points

$$f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

Partie A

- $f(-x) = \frac{1}{e^{-x} + e^x} = f(x)$: la fonction f est donc paire. Donc Γ est symétrique autour de l'axe des ordonnées.
- On a $x \geq 0 \Rightarrow -x \leq x \iff e^{-x} \leq e^x$.
- On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
 - Comme $e^x > 0$, f inverse d'une fonction dérivable sur \mathbb{R} le dénominateur ne s'annule pas est dérivable sur \mathbb{R} et

$$f'(x) = -\frac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2}.$$
 On a vu que $e^x - e^{-x} \geq 0$ et $(e^x + e^{-x})^2 > 0$, donc quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \leq 0$. La fonction f est donc décroissante sur \mathbb{R} et en particulier sur $[0; +\infty[$.
- On a démontré que :

$$0 < e^{-x} \leq e^x \Rightarrow 0 + e^x < e^{-x} + e^x \leq e^x + e^x$$

$$\iff e^x < e^{-x} + e^x < 2e^x \iff \frac{1}{2e^x} \leq \frac{1}{e^{-x} + e^x} < \frac{1}{e^x} \iff$$

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x).$$
 - On en déduit que sur $[0; +\infty[$, la courbe Γ est située au dessus de la Γ_2 et en dessous de la courbe Γ_1 .
Tangente au point $(0; \frac{1}{2})$: elle passe par ce point et a pour coefficient directeur $f'(0) = 0$: elle est donc horizontale

Partie B

- I_n est l'intégrale d'une fonction positive et continue définie sur une partie de $[0; +\infty[$: cette intégrale existe et est positive.
Elle est égale (en unités d'aire) à l'aire de la surface comprise entre l'axe des abscisses, la courbe Γ et les droites verticales d'équations $x = n$ et $x = n + 1$.
- Sur l'intervalle $[n; n + 1]$, la fonction f est décroissante; donc

$$n \leq x \leq n + 1 \Rightarrow f(n + 1) \leq f(x) \leq f(n).$$
 En intégrant ces trois fonctions sur l'intervalle $[n; n + 1]$ on a donc

$$\int_n^{n+1} f(n + 1) dx \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq \int_n^{n+1} f(n) dx \iff$$

$$f(n + 1) \int_n^{n+1} 1 dx \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n) \int_n^{n+1} 1 dx$$
 ou encore $f(n + 1)[(n + 1) - n] \leq I_n \leq f(n)[(n + 1) - n] \iff$

$$f(n + 1) \leq I_n \leq f(n) \text{ quel que soit } n \in \mathbb{N}.$$

- b. D'après la question précédente
 $f(n+2) \leq I_{n+1} \leq f(n+1)$ et donc par transitivité $I_{n+1} \leq I_n$.
 La suite (I_n) est décroissante.
- c. La suite (I_n) est décroissante et minorée par zéro : elle est donc convergente vers une limite $\ell \geq 0$.
 Or on a vu $I_n \leq f(n)$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 0$.
 D'après le théorème des « gendarmes », on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \ell = 0$.

Partie C

1. Sur l'intervalle $[0 ; n]$, les fonctions h , f et g sont positives et intégrables.

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_0^n h(x) dx \leq \int_0^n f(x) dx \leq \int_0^n g(x) dx, \text{ soit}$$

$$\int_0^n \frac{1}{2} e^{-x} dx \leq J_n \leq \int_0^n e^{-x} dx \Leftrightarrow \left[-\frac{1}{2} e^{-x} \right]_0^n \leq J_n \leq [-e^{-x}]_0^n \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} (1 - e^{-n}) \leq J_n \leq 1 - e^{-n}.$$

Comme $e^{-n} > 0$, $1 - e^{-n} < 1$. D'où le résultat demandé.

2. $J_{n+1} - J_n = \int_0^{n+1} f(x) dx - \int_0^n f(x) dx = \int_n^{n+1} f(x) dx.$

Cette dernière intégrale est positive comme intégrale d'une fonction positive avec $n < n+1$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

$J_{n+1} - J_n > 0 \Rightarrow J_{n+1} > J_n$. La suite (J_n) est croissante.

La suite (J_n) est croissante et majorée par 1 : elle converge donc vers une limite L inférieure ou égale à 1.

3. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$.

En utilisant le théorème admis on en déduit que :

$$\frac{1}{2} \leq L \leq 1.$$

4. a. En partant de l'énoncé et en multipliant chaque terme par e^x , on obtient

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x \times e^x + 1} = \frac{e^x}{(e^x)^2 + 1}.$$

- b. La dérivée de la fonction $v(e^x)$ est $v'(e^x) = e^x \times u(e^x) = e^x \times \frac{1}{1 + (e^x)^2} =$

$$\frac{e^x}{(e^x)^2 + 1} = f(x).$$

- c. On a donc $J_n = \int_0^n f(x) dx = [v(e^x)]_0^n = v(e^n) - v(1) = v(e^n) - \frac{\pi}{4}$.

$$\text{On sait que } \lim_{n \rightarrow +\infty} v(e^n) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = L = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

$$L = \frac{\pi}{4}.$$

Annexe de l'exercice 1

Cette page sera complétée et remise avec la copie

