∽ Corrigé du baccalauréat S Amérique du Nord ∾ juin 2003

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. Réponse **b.**
2. En égalant les deux intégrales on obtient :
   $-\mathrm{e}^{-\lambda t}+1=\mathrm{e}^{-\lambda t} \iff 1=2\mathrm{e}^{-\lambda t} \iff \mathrm{e}^{-\lambda t}=\dfrac{1}{2}$ et par croissance de la fonction logarithme népérien :
   $-\lambda t=\ln\frac{1}{2} \iff -\lambda t=-\ln 2 \iff t=\dfrac{\ln 2}{\lambda}$.
   Réponse **a.**
3. On a donc $p([0,\ 1[)=\displaystyle\int_0^1 \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-\lambda}+1=0,18 \iff \mathrm{e}^{-\lambda}=0,82=\dfrac{82}{100}=\dfrac{41}{50} \iff -\lambda=\ln\left(\dfrac{41}{50}\right) \iff \lambda=\ln\left(\dfrac{50}{41}\right)$.
   Réponse **a.**
4. On calcule $\dfrac{p(3\ ;\ +\infty)}{p(2\ ;\ +\infty)}=\dfrac{\mathrm{e}^{-3\lambda}}{\mathrm{e}^{-2\lambda}}=\mathrm{e}^{-\lambda}=p(1,+\infty[)$.
   Dans la suite de l'exercice on prendra $\lambda=0,2$.
5. La probabilité cherchée est $p(3,+\infty)=\mathrm{e}^{-3\lambda}=\mathrm{e}^{-0,6}\approx 0,5488$.
   Réponse **b.**
6. On vient de voir que la probabilité pour un appareil de ne pas tomber en panne au cours des trois premières années est $\mathrm{e}^{-0,6}$
   On a un schéma de Bernoulli avec une variable aléatoire X de paramètres $n=10$ et $p=\mathrm{e}^{-0,6}$.
   D'où $p(X=4)=\mathrm{C}_4^{10}\left(\mathrm{e}^{-0,6}\right)^4\left(1-\mathrm{e}^{-0,6}\right)^6\approx 0,1607$.
   Réponse **c.**

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** Comme $S(\mathrm{A}_0)\neq \mathrm{A}_1$ et $S(\mathrm{A}_1)\neq \mathrm{A}_2$, on sait qu'il existe une seule similitude directe S transformant A_0 en A_1 et A_1 en A_2.

   b. On sait que l'écriture complexe de S est $z'=az+b$. En l'appliquant à A_0 et A_1, on obtient

$$\left\{\begin{array}{rcl} -1-4\mathrm{i} &=& a(5-4\mathrm{i})+b\\ -4-\mathrm{i} &=& a(-1-4\mathrm{i})+b\end{array}\right.$$

   Par différence on obtient $3-3\mathrm{i}=a(6) \iff a=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.
   Puis en remplaçant a dans la première équation :
   $-1-4\mathrm{i}=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)(5-4\mathrm{i})+b \iff b=-1-4\mathrm{i}-\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)(5-4\mathrm{i})=-1-4\mathrm{i}-\dfrac{5}{2}+2+2\mathrm{i}+\dfrac{5}{2}\mathrm{i}=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.
   L'écriture complexe de S est donc :
   $z'=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)z-\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

c. On calcule $|a| = \dfrac{|1-\mathrm{i}|}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(-\frac{\pi}{4})\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

Le rapport de S est $|a| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et son angle est $-\dfrac{\pi}{4}$.

Le centre Ω est le point invariant de la similitude ; donc

$\omega = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)\omega - \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i} \iff \omega\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i} \iff \omega = \dfrac{-3+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{-3+1+3\mathrm{i}+\mathrm{i}}{1+1} = \dfrac{-2+4\mathrm{i}}{2} = -1+2\mathrm{i}$.

d. $\omega - z' = -1 + 2\mathrm{i} - \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)z - \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\mathrm{i} + \dfrac{-1+\mathrm{i}}{2}z$.

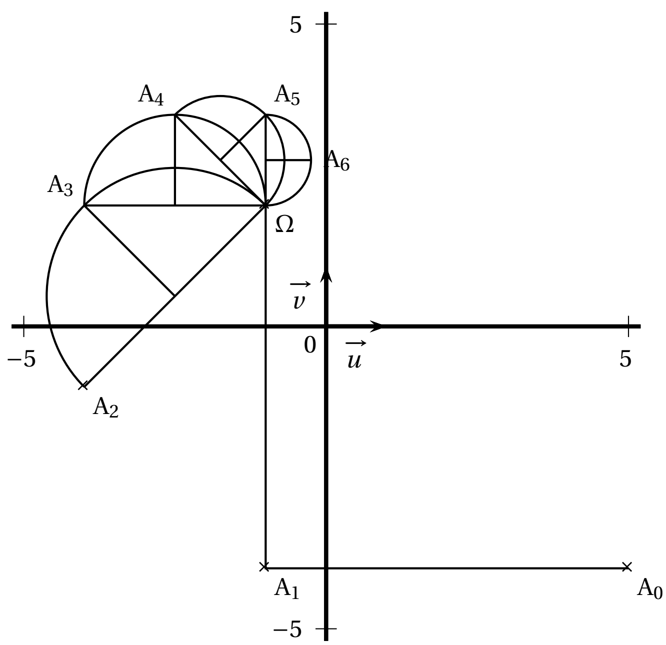
$\mathrm{i}\left(z - z'\right) = \mathrm{i}\left(z - \dfrac{1-\mathrm{i}}{2}z - \dfrac{-3+\mathrm{i}}{2}\right) = \dfrac{1+3\mathrm{i}}{2} + \dfrac{-1+\mathrm{i}}{2}z$.

Conclusion : $\omega - z' = \mathrm{i}\left(z - z'\right)$.

En terme de modules : $\left|\omega - z'\right| = \left|\mathrm{i}\left(z-z'\right)\right| \iff \Omega M' = MM'$; le triangle $\Omega MM'$ est isocèle.

En terme d'arguments : $\left(\overrightarrow{M'M}, \overrightarrow{M'\Omega}\right) = \arg\dfrac{\omega - z'}{z - z'} = \arg \mathrm{i} = \dfrac{\pi}{2}$, donc le triangle $\Omega MM'$ est rectangle en M'.

2. a. Pour placer A_{n+1} : ce point est à l'intersection du demi-cercle de diamètre $[\Omega\mathrm{A}_n]$ et de la médiatrice de $[\Omega\mathrm{A}_n]$.



b. A_{n+1} est l'image de A_n et A_{n+2} est l'image de A_{n+1} par S, donc $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{A}_{n+2} = k\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$ avec $k = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ rapport de la similitude.

On a donc $u_{n+1} = ku_n$ ce qui montre que la suite (u_n) est geometrique de raison $k = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, de premier terme $\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1 = 6$.

3. a. On sait que $v_n = u_0 \times \dfrac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 6 \times \dfrac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

b. Comme $-1 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{6}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{12}{2-\sqrt{2}}$.

La suite (v_n) a pour limite $\dfrac{12}{2-\sqrt{2}}$.

4. a. Le triangle $\Omega A_n A_{n+1}$ isocèle rectangle en A_{n+1} est inscrit dans le cercle de centre le milieu de $[A_n\Omega]$; son rayon $r_n = \dfrac{1}{2}A_n\Omega = \dfrac{1}{2}A_nA_{n+1}\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}u_n$.

Or $u_n = 6\times\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$, donc $r_n = 6\times\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$.

b. On a $r_n < 10^{-2} \iff 6\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} < 10^{-2} \iff \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} < \frac{10^{-2}}{6}$.

Par croissance de la fonction logarithme népérien :

$$(n+1)\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < \ln\left(\frac{10^{-2}}{6}\right) \iff n+1 > \frac{\ln\dfrac{10^{-2}}{6}}{\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$$

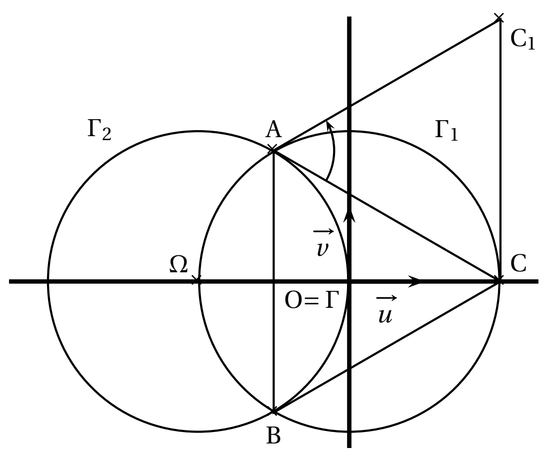
Or $\dfrac{\ln\frac{10^{-2}}{6}}{\ln\frac{\sqrt{2}}{2}} \approx 18{,}4$, d'où $n > 18$.

Il faut donc choisir $p = 17$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1.



2. a.

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{-1-i\sqrt{3}-2}{-1+i\sqrt{3}-2} = \frac{-3-i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}} = \frac{3+i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^2}{\left(\sqrt{3}+i\right)\left(\sqrt{3}-i\right)} =$$
$$\frac{3-1+2i\sqrt{3}}{3+1} = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3} = e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

b. En prenant les modules des deux membres de l'égalité précédente :
$\left|\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = \dfrac{|z_B - z_C|}{|z_A - z_C|} = \dfrac{CB}{CA} = \left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = 1$, c'est-à-dire CB = CA : le triangle est isocèle en C.

En prenant les arguments des deux membres :
$\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \frac{\pi}{3}$. L'angle au sommet a pour mesure $\frac{\pi}{3}$, donc les deux autres aussi, c'est-à-dire que le triangle ABC est équilatéral.

c. Le triangle étant équilatéral, le centre du cercle circonscrit est aussi le centre de gravité du triangle, soit l'isobarycentre des trois sommets.

Donc $z_\Gamma = \dfrac{1}{3}(-1+i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}+2) = 0$.

Un rayon est $\Omega A = 2$. Voir le tracé ci-dessus

3. **a.** Soit M d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$.
$2(z+\overline{z})+z\overline{z} = 0 \iff 2(x+\mathrm{i}y+x-\mathrm{i}y)+(x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y) = 0 \iff 4x+x^2+y^2 = 0 \iff (x+2)^2-4+y^2 = 0 \iff (x+2)^2+y^2 = 4$.
Ceci montre que les points $M(x\ ;\ y)$ appartiennent au cercle Γ_2 de centre le point de coordonnées $(-2\ ;\ 0)$ et de rayon 2.
b. $\mathrm{A}\left(-1\ ;\ \sqrt{3}\right) \in \Gamma_2 \iff (-1+2)^2+3 = 4 \iff 4 = 4$ vraie.
$\mathrm{B}(-1\ ;\ -\sqrt{3}) \in \Gamma_2 \iff (-1+2)^2+3 = 4 \iff 4 = 4$ vraie.
les points A et B sont éléments de Γ_2.

4. **a.** L'écriture complexe de la rotation est :
$z_{\mathrm{A}_1} - z_{\mathrm{A}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(z - z_{\mathrm{A}})$.
Donc $z_{\mathrm{A}_1} - z_{\mathrm{A}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{A}}) = 0$ donc $z_{\mathrm{A}_1} = z_{\mathrm{A}}$ ce qui est normal pour le centre de la rotation !
De même
$z_{\mathrm{B}_1} - z_{\mathrm{A}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}) \iff z_{\mathrm{B}_1} = -1+\mathrm{i}\sqrt{3}+\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-1-\mathrm{i}\sqrt{3}-1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right) = -1+\mathrm{i}\sqrt{3}-1-3-\mathrm{i}\sqrt{3}+\mathrm{i}\sqrt{3} = 1-\mathrm{i}\sqrt{3} = z_{\mathrm{C}}$.
On aurait pu dire que ABC étant un triangle équilatéral direct l'image de B dans la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ est le point C.
Soit C_1 l'image de C par r_1. Pour construire ce point on construit le triangle équilatéral direct ACC_1 ; comme ABC et ACC_1 sont symétriques autour de la droite (AC), le point C_1 est le symétrique de B autour de la droite (AC).
$z_{\mathrm{C}_1} - z_{\mathrm{A}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}) \iff z_{\mathrm{C}_1} = -1+\mathrm{i}\sqrt{3}+\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2) = -1+\mathrm{i}\sqrt{3}+2+\mathrm{i}\sqrt{3} = 2+2\mathrm{i}\sqrt{3}$.
b. Puisque le triangle AΩO est équilatéral, l'image de Γ dans la rotation r_1 est le point O ; comme il y a conservation des longueurs, l'image du cercle Γ_2 par la rotation r_1 est le cercle Γ_1.

5. **a.** L'image de Ω est le point O ; donc $0 = -2a + b \iff b = 2a$.
b. $z_{r(\mathrm{C})} = 2a + b = 2a + 2a = 4a$.
On sait que $|a| = 1$, donc $|4a| = 4$: le point $r(\mathrm{C})$ appartient au cercle de centre O et de rayon 4.
On a $|z_1| = \left|2+2\mathrm{i}\sqrt{3}\right| = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$.
Le point C_1 appartient bien au cercle de centre O de rayon 4.

PROBLÈME **10 points**
Commun à tous les candidats

1. **a.** On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$.
Posons $h = \mathrm{e}^x$, donc $f(x) = \dfrac{\ln(1+h)}{h}$.
D'après le rappel de l'énoncé :
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(h) = 0$.
b. On factorise e^x dans la parenthèse :
$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\ln\left(\mathrm{e}^x\left[\mathrm{e}^{-x}+1\right]\right) = \mathrm{e}^{-x}\left(\ln \mathrm{e}^x + \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)\right) = \mathrm{e}^{-x}\left(x + \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)\right)$
et en développant :
$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} + \mathrm{e}^{-x}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)$.
On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$.
D'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) = 0$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) = 0$.
Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

c. Les résultats précédents montrent que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ au voisinage de moins l'infini et que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ au voisinage de l'infini.

2.
$$g(t) = \frac{t}{1+t} - \ln(1+t).$$

a. g somme de fonctions définies et dérivables sur $]-1\ ;\ +\infty[$ est dérivable et sur intervalle :
$g'(t) = \dfrac{1+t-t}{(t+1)^2} - \dfrac{1}{1+t} = \dfrac{1-(t+1)}{(t+1)^2} = \dfrac{-t}{(t+1)^2}$.
Pour $t > 0$, $g'(t) < 0$, donc la fonction g est décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

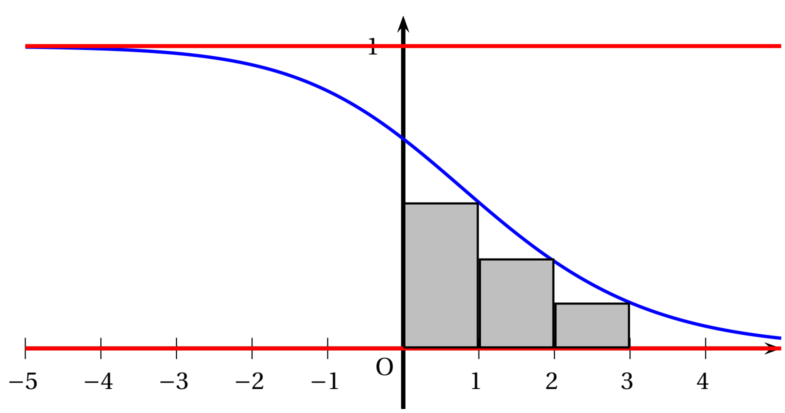
b. On a $g(0) = 0$, la fonction étant décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$, elle est strictement négative sur cet intervalle.

3. a. La fonction f est dérivable comme produit de fonctions dérivables sur $]-1\ ;\ +\infty[$ et sur cet intervalle :
$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right) + \mathrm{e}^{-x} \times \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.
Posons $t = \mathrm{e}^x$, donc $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = \dfrac{1}{t}$. On peut donc écrire :
$f'(x) = f'(t) = -\dfrac{1}{t}\ln(1+t) + \dfrac{1}{1+t} = \dfrac{1}{t}\left[\dfrac{t}{1+t} - \ln(1+t)\right] = \dfrac{1}{t}g(t)$.
Ou encore $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}g\left(\mathrm{e}^x\right)$

b. On sait que pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$, donc le signe de f' est celui de g sur $]0\ ;\ +\infty[$, donc $f' < 0$: la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	1	$\ln 2$	0

4.



Partie B : comportements asymptotiques d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$

1. F est la primitive de f qui s'annule en $x = 0$. Donc $F'(x) = f(x)$.
La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$, donc la fonction F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. **a.** $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^t} = \dfrac{1+\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t} = 1-\dfrac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t}$.
En utilisant le résultat précédent :
$$\int_0^x \frac{1}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x 1\,\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t} = \left[t-\ln\left(1+\mathrm{e}^t\right)\right]_0^x = x-\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)+\ln 2$$
b. $F(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\ln\left(1+\mathrm{e}^t\right)\,\mathrm{d}t$.
Posons : $u(t) = \ln\left(1+\mathrm{e}^t\right)$; $\mathrm{d}v = \mathrm{e}^{-t}$
Donc $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t}$; $v(t) = -\mathrm{e}^{-t}$.
Toutes ces fonctions sont continues car dérivables ; on peut donc intégrer par parties.
$F(x) = \left[-\mathrm{e}^{-t}\ln\left(1+\mathrm{e}^t\right)\right]_0^x + \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t =$
$-\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)+\ln 2+x-\ln(1+\mathrm{e}^x)+\ln 2+\ln 2-\ln 2 =$
$F(x) = x-(1+\mathrm{e}^{-x})\ln(1+\mathrm{e}^x)+2\ln 2$.
c. • $F(x) = x-(1+\mathrm{e}^{-x})\ln(1+\mathrm{e}^x)+2\ln 2 = x-\ln(1+\mathrm{e}^x)-\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)+2\ln 2 = x-\ln(1+\mathrm{e}^x)-f(x)+2\ln 2$.
• $F(x) = \ln\mathrm{e}^x-\ln(1+\mathrm{e}^x)-\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)-f(x)+2\ln 2 = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right)$.

3. On utilise la deuxième écriture : $\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.
Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = 1$, puis $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right) = \ln 1 = 0$.
On sait d'autre part que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
D'où finalement : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 2\ln 2$.

4. Calculons $F(x)-x = -\ln(1+\mathrm{e}^x)-f(x)+2\ln 2$.
On a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 1+\mathrm{e}^x = 1$, puis $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right) = \ln 1 = 0$ et comme $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$, on a finalement :
$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F(x)-x = -1+2\ln 2$.
La dernière égalité peut s'écrire $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F(x)-x+1-2\ln 2 = 0$, ce qui signifie que la représentation graphique de F a pour asymptote oblique au voisinage de moins l'infini la droite d'équation $y = x-1+2\ln 2$.

Partie C : étude d'une suite

1. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, f_n est l'aire du rectangle de côtés 1 et $f(n)$. On peut choisir pour le côté de longueur 1 le segment ayant pour extrémités les points d'abscisses $n-1$ et n.
u_n est donc la somme des aires des n premiers rectangles.
Exemple : sur le dessin on a représenté u_3.
2. On calcule $u_{n+1}-u_n = f(n+1) > 0$: la suite est croissante (strictement).
3. **a.** La fonction f est décroissante : donc pour tout naturel k non nul et pour t tel que $k-1 \leqslant t \leqslant k$, par décroissance $f(k) \leqslant f(t)$ et puisque $k-1 \leqslant k$:
$\displaystyle\int_{k-1}^k f(k)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{k-1}^k f(t)\,\mathrm{d}t$, soit $f(k) \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^k f(t)\,\mathrm{d}t + \cdots + \int_{n-1}^n f(t)\,\mathrm{d}t$ soit par linéarité de l'intégration :
$u_n \leqslant \displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$
b. En sommant les inégalités précédentes pour k allant de 1 à n, on obtient
$u_n = f(1)+f(2)+\cdots+f(n) \leqslant \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ c'est-à-dire $u_n \leqslant F(n)$ pour tout n non nul.

4. La suite $(F(n))$ est croissante et a pour limite $2\ln 2$ en plus l'infini. On a donc $u_n \leqslant F(n) \leqslant 2\ln 2$.
   La suite (u_n) est croissante et majorée : elle converge vers une limite ℓ telle que $\ell \leqslant 2\ln 2$.