Corrigé du baccalauréat S Amérique du Nord 31 mai 2012
Corrigé de A. Saoud Manal

EXERCICE 1 **5 POINTS**

PARTIE A.

1. Un quart des femmes et un tiers des hommes adhèrent à la section tennis, donc $p_F(T) = \dfrac{1}{4}$ et $p_{\overline{F}}(T) = \dfrac{1}{3}$.
   30 % des membres de cette association adhèrent à la section tennis, donc $p(T) = \dfrac{3}{10}$.
   F et $\overline{F}$ forment une partition, d'après le théorème des probabilités totales, on a :
   $p(T) = p(T \cap F) + p\left(T \cap \overline{F}\right) = p_F(T) \times p(F) + p_{\overline{F}}(T) \times p\left(\overline{F}\right) = \dfrac{1}{4} \times p(F) + \dfrac{1}{3}(1 - p(F)) = \dfrac{3}{10}$.
   On en déduit que $\dfrac{1}{12}p(F) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{10}$ soit $p(F) = \dfrac{2}{5}$.
2. Il s'agit de calculer $p_T(F)$. Or $p_T(F) = \dfrac{p(T \cap F)}{p(T)} = \dfrac{p(F) \times p_F(T)}{p(T)} = \dfrac{\frac{2}{5} \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{10}} = \dfrac{1}{3}$.

PARTIE B.

1. **a.** C'est une répétition d'une expérience aléatoire à deux issues, identique et indépendante. La variable aléatoire X, donnant le nombre de membres adhérant à la section tennis parmi les membres choisis, suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 4$ (nombre d'épreuves) et $p = \dfrac{3}{10}$. On souhaite deux succès, la probabilité est donc $p(X = 2) = \dbinom{4}{2} \times \left(\dfrac{3}{10}\right)^2 \times \left(1 - \dfrac{3}{10}\right)^{4-2} = \dbinom{4}{2} \times \left(\dfrac{3}{10}\right)^2 \times \left(\dfrac{7}{10}\right)^{4-2} = \dfrac{1\,323}{5\,000} \approx 0,2646$.

   b. Il suffit de considérer l'évènement contraire qui consiste à ne choisir aucun membre du club de tennis n fois, soit $\left(\dfrac{7}{10}\right)^n$. Le résultat est donc $p_n = 1 - \left(\dfrac{7}{10}\right)^n$.

   c. $p_n \geqslant 0,99$, $1 - \left(\dfrac{7}{10}\right)^n \geqslant 0,99$, $\left(\dfrac{7}{10}\right)^n \leqslant 0,01$, $\ln\left(\left(\dfrac{7}{10}\right)^n\right) \leqslant \ln(0,01)$ car la fonction ln est croissante.
   $n \ln\left(\dfrac{7}{10}\right) \leqslant \ln(0,01)$, $n \geqslant \dfrac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{7}{10}\right)}$ car $\ln\left(\dfrac{7}{10}\right) < 0$. $n \geqslant 12,9$, i.e. $n \geqslant 13$.

2. **a.** Les gains algébriques possibles sont -5, 15, et 35.

$Y = y_i$	-5	15	35
$p(Y = y_i)$	$\dfrac{\binom{90}{2}}{\binom{100}{2}} = \dfrac{89}{110}$	$\dfrac{\binom{90}{1}\binom{10}{1}}{\binom{100}{2}} = \dfrac{2}{11}$	$\dfrac{\binom{10}{2}}{\binom{100}{2}} = \dfrac{1}{110}$

   b. L'espérance est donc $E(Y) = \displaystyle\sum_i y_i p\left(Y = y_i\right) = -5 \times \dfrac{89}{110} + 15 \times \dfrac{2}{11} + 35 \times \dfrac{1}{110} = -1$.
   Le jeu est en défaveur du joueur car l'espérance est négative ou encore qu'en moyenne, sur un grand nombre de partie, le joueur perd 1 euro par partie.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

PARTIE A. RESTITUTION ORGANISÉE DES CONNAISSANCES

On pose $x = \mathrm{e}^t$, on a donc $x > 0$, $\ln(x) = t$. On a $\lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{e}^t = +\infty = \lim\limits_{t\to\infty} x$. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln(\mathrm{e}^t)}{\mathrm{e}^t} = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t}{\mathrm{e}^t} = 0$ puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^t}{t} = +\infty$.

PARTIE B.

1. La fonction g est dérivable d'après les théorèmes généraux et $g'(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$.

Pour $x \geqslant 1$, $2x > 0$ et $\dfrac{1}{x} > 0$, donc $g'(x) > 0$ donc la fonction g est strictement croissante sur $[1\,;\,+\infty[$.

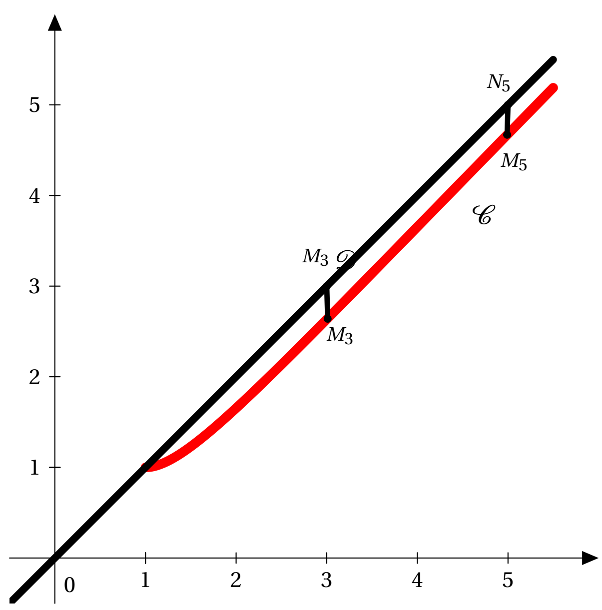
2. a. La fonction $f(x) = u(x) - \dfrac{v(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = \ln(x)$. u et v sont dérivables avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$. D'après les théorèmes généraux f est dérivable et on a $f'(x) = u'(x) - \dfrac{v'(x)u(x) - v(x)u'(x)}{u(x)^2} = 1 - \dfrac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x)}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1 + \ln(x)}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$

b. Pour tout $x \in [1\,;\,+\infty[$, $g(x) > 0$ et $x^2 > 0$, donc $f'(x) > 0$. On en déduit que f est strictement croissante sur $[1\,;\,+\infty[$.

c. $f(x) - x = -\dfrac{\ln(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = -\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ donc la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

d. Pour tout $x \in [1\,;\,+\infty[$, $\ln(x) \geqslant 0$ et $x > 0$, donc $\dfrac{\ln(x)}{x} \geqslant 0$ donc la courbe $\mathscr{C}$ est située en dessous de la droite $\mathscr{D}$.

3. a. Un graphique pour comprendre :



La distance $M_kN_k = |f(x) - x| = \dfrac{\ln(k)}{k} > 0$.

b.

Variables	k est un entier
	d est une variable réelle
Initialisation	$k := 2$; $d := \dfrac{\ln(k)}{k}$
Traitement	Tant que $d > 10^{-2}$
	Début du tant que
	$k := k+1$;
	$d := \dfrac{\ln(k)}{k}$;
	Fin du tant que
Sortie	Afficher k

EXERCICE 3 — 5 POINTS

PARTIE A.

1. Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, $\dfrac{1}{1+x^2} > 0$, donc $f'(x) > 0$. On en déduit que f est strictement croissante sur $[0\,;\,1]$

2. **a.** g est la composée des fonctions f et $u : x \longmapsto \tan(x)$ qui sont dérivables, donc g est dérivable et $g'(x) = f'(u(x)) \times u'(x) = \dfrac{1}{1+\tan^2(x)} \times \left(1+\tan^2(x)\right) = 1$

   b. Pour tout x de $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{4}\right]$, $g'(x) = 1$, donc pour tout x de $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{4}\right]$, $g(x) = x + c$ avec $c \in \mathbb{R}$ une constante. D'autre part, $0 + c = g(0) = f(\tan(0)) = f(0) = 0$. On en déduit que $c = 0$. On a donc $g(x) = x$ pour tout x de $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{4}\right]$. $g\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4} = f\left(\tan(\frac{\pi}{4})\right) = f(1)$, donc $f(1) = \dfrac{\pi}{4}$.

3. f est croissante sur $[0\,;\,1]$. $f(0) = 0$ et $f(1) = \dfrac{\pi}{4}$ donc, pour tout $x \in [0\,;\,1]$, $\boxed{0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\pi}{4}}$

PARTIE B.

1. On pose $u(x) = x$. u et f sont dérivables et leurs dérivées $u'(x) = 1$ et $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ sont continues, d'après le théorème de l'intégration par parties on a $I_0 = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 u'(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \left[u(x)f(x)\right]_0^1 - \int_0^1 u(x)f'(x)\,\mathrm{d}x = \left[xf(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \dfrac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = f(1) - \dfrac{1}{2}\int_0^1 \dfrac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. On pose pour tout x de $[0\,;\,1]$, $v(x) = 1+x^2$. v est dérivable avec $v'(x) = 2x$, de plus $v(x) > 0$ pour tout x de $[0\,;\,1]$. $\displaystyle\int_0^1 \dfrac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \dfrac{v'(x)}{v(x)}\,\mathrm{d}x = \left[\ln(v(x))\right]_0^1 = \ln(2)$. On en déduit que $I_0 = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\ln(2)$.

2. **a.** Pour tout x de $[0\,;\,1]$, $0 \leqslant x^n$ et $0 \leqslant f(x)$, donc $0 \leqslant x^n f(x)$ d'après la positivité de l'intégrale, on a $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$, donc $0 \leqslant I_n$.

   b. Pour tout x de $[0\,;\,1]$, $0 \leqslant x^n$ et $f(x) \leqslant \dfrac{\pi}{4}$, donc $x^n f(x) \leqslant \dfrac{\pi}{4}x^n$ d'après la croissance de l'intégrale, on a $\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \dfrac{\pi}{4}x^n\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{\pi}{4} \times \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \dfrac{\pi}{4(n+1)}$, donc

   $I_n \leqslant \dfrac{\pi}{4(n+1)}$.

c. On a $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\pi}{4(n+1)}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\pi}{4(n+1)} = 0$, d'après le théorème des comparaisons des limites de suites, (I_n) converge et sa limite est 0 .

EXERCICE 4 **5 POINTS**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. $f(M) = M \iff z = z^2 \iff z^2 - z = 0 \iff z(z-1) = 0 \iff z = 0$ ou $z = 1$. On en déduit que $\Gamma_1 = \{O, \Omega\}$.

2. **a.** $a = \sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2} = 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

   b. Soit M tel que $f(M) = A \iff z^2 = a \iff z^2 - 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = 0 \iff z^2 - \left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}\right)^2 = 0 \iff$ $\left(z - \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}\right)\left(z + \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}\right) = 0 \iff z - \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{8}} = 0$ ou $z + \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{8}} = 0 \iff$
   $z = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$ ou $z = -\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$.
   Les affixes des deux antécédents de A par f sont $\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$ et $-\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$.

3. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ l écriture algébrique de z. On a $z' = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy$ est imaginaire pur si et seulement si $x^2 - y^2 = 0 \iff (x-y)(x+y) = 0 \iff x - y = 0$ ou $x + y = 0 \iff$
   $x = y$ ou $x = -y$.
   Γ_2 est donc la réunion des droites d'équations $x = y$ et $x = -y$.

4. **a.** M distinct de Ω est tel que le triangle $\Omega MM'$ est rectangle isocèle direct en Ω si et seulement si $z \neq 1$ et M' est l'image de M par la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2} \iff z' - 1 =$ $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}(z-1) \iff z^2 - 1 = \mathrm{i}(z-1) \iff z^2 - \mathrm{i}z - 1 + \mathrm{i} = 0$ avec $z \neq 1$.

   b. $(z-1)(z+1-\mathrm{i}) = z^2 + z - \mathrm{i}z - z - 1 + \mathrm{i} = z^2 - \mathrm{i}z - 1 + \mathrm{i}$

   c. $z^2 - \mathrm{i}z - 1 + \mathrm{i} = 0 \iff (z-1)(z+1-\mathrm{i}) = 0 \iff z - 1 = 0$ ou $z + 1 - \mathrm{i} = 0 \iff$
   $z = 1$ ou $z = -1 + \mathrm{i}$. Or $z \neq 1$, donc Γ_3 contient uniquement le point d'affixe $-1 + \mathrm{i}$.

5. **a.** $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) = \arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) = \arg\left(\dfrac{z^2}{z}\right) = \arg(z)$.

   b. Les points O, M et M' sont alignés si et seulement si $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) \equiv 0[\pi] \iff \arg(z) \equiv$ $0[\pi] \iff z \in \mathbb{R}$. Γ_4 est donc l'axe des abscisses privé des points O et Ω.

EXERCICE 4 SPÉCIALITÉ **5 POINTS**

PARTIE A.

1. **Recherche de points invariants :**
   M est un point invariant $\iff z = 5\mathrm{i}z + 6\mathrm{i} + 4 \iff z - 5\mathrm{i}z = 6\mathrm{i} + 4 \iff z(1 - 5\mathrm{i}) = 6\mathrm{i} + 4 \iff$
   $z = \dfrac{6\mathrm{i} + 4}{1 - 5\mathrm{i}} = -1 + \mathrm{i}$. L'unique point invariant par S est le point Ω d'affixe $\omega = -1 + \mathrm{i}$.
   $z' - \omega = z' - (-1+\mathrm{i}) = 5\mathrm{i}z + 6\mathrm{i} + 4 - (-1+\mathrm{i}) \iff z' - (-1+\mathrm{i}) = 5\mathrm{i}z + 5 + 5\mathrm{i} = 5\mathrm{i}\left(z' - (-1+\mathrm{i})\right) =$ $5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}(z - \omega) \iff z' - \omega = 5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}(z - \omega)$. C'est l'expression complexe de la similitude de centre Ω, de rapport 5 et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

2. $z' = x' + \mathrm{i}y' = 5\mathrm{i}z + 6\mathrm{i} + 4 = 5\mathrm{i}(x + \mathrm{i}y) + 6\mathrm{i} + 4 = 5\mathrm{i}x - 5y + 6\mathrm{i} + 4 = -5y + 4 + \mathrm{i}(5x + 6) \iff$
$\begin{cases} x' &= -5y + 4 \\ y' &= 5x + 6 \end{cases}$

Partie B.

1. a. On a $4 \times 1 + 3 \times (-1) = 1$, en multipliant par 5, on obtient $4 \times 5 + 3 \times (-5) = 5$. On a ainsi une solution particulière $(5\,;\,-5)$. D'où $4a + 3b = 5 \iff 4a + 3b = 4 \times 5 + 3 \times (-5) \iff 4a - 4 \times 5 = -3b + 3 \times (-5) \iff 4(a - 5) = -3(b + 5)$. On en déduit que 4 divise $-3(b + 5)$, or 4 et -3 sont premiers entre eux, d'près le théorème de Gauss, 4 divise $b + 5$, donc $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $b + 5 = 4k \iff b = -5 + 4k$, on en déduit que $4(a - 5) = -3(-5 + 4k + 5) \iff 4(a - 5) = -3 \times 4k \iff a - 5 = -3k \iff a = 5 - 3k$. L'ensemble des couples solutions est donc $\{(5 - 3k\,;\,-5 + 4k) / k \in \mathbb{Z}\}$.

b. $-3x' + 4y' = 37 \iff -3x' + 4y' \iff -3(-5y + 4) + 4(5x + 6) = 37 \iff$

$20x + 15y - 12 + 24 = 37 \iff 20x + 15y = 25 \iff 4x + 3y = 5 \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $\begin{cases} x &= 5 - 3k \\ y &= -5 + 4k \end{cases}$

$-3 \leqslant 5 - 3k \leqslant 5$ et $-3 \leqslant -5 + 4k \leqslant 5$, donc seuls $k = 1$ et $k = 2$ sont tels que

$-3 \leqslant x \leqslant 5$ et $-3 \leqslant y \leqslant 5$. Les points de coordonnées $(2\,;\,-1)$ et $(-1\,;\,3)$ répondent à la question.

2. a. $x' + y' = -5y + 4 + 5x + 6 = 5(x - y + 2)$, donc $x' + y'$ est un multiple de 5.

b. $x' + y' - (x' - y') = 2y'$, donc $x' - y'$ et $x' + y'$ sont congrus modulo 2.

Par ailleurs 2 est un nombre premier. Si 2 divise $x'^2 - y'^2 = (x' - y')(x' + y')$, alors il divise $x' - y'$ ou $x' + y'$. Supposons qu'il divise $x' - y'$, alors $x' - y' \equiv 0\ [2]$, or $x' - y' \equiv x' + y'\ [2]$, donc $x' + y' \equiv x' - y' \equiv 0\ [2]$. Le raisonnement est identique si on suppose que $x' + y' \equiv 0\ [2]$.

c. $x'^2 - y'^2 = 20$ donc $x'^2 - y'^2$ est multiple de 2 donc $x' - y'$ et $x' + y'$ le sont également. Par ailleurs $x' + y'$ est un multiple de 5. Or $(x' - y')(x' + y') = 20$, donc $x' + y'$ est un multiple de 2 et de 5 qui divise 20, $x' + y'$ est donc un multiple de 10 qui divise 20. On en déduit que $x' + y' = \pm 10$ ou $x' + y' = \pm 20$. $x' + y' = \pm 20$ est impossible car cela donnerait $x' - y' = \pm 1$ qui ne serait pas congru à $x' + y' = \pm 20$ modulo 2.

Il reste donc l'unique possibilité $x' + y' = \pm 10$ donc $x' - y' = \pm 2$, ce qui donne $x' = \pm 6$ et $y' = \pm 4$. $x' = 6$ n'est pas possible car cela donnerait $6 = -5y + 4$ d'où $y = -\dfrac{2}{5}$, donc y n'est pas entier. On a finalement $x' = -6$ et $y' = -4$ ce qui donne $x = -2$ et $y = 2$. L'unique point de $\mathcal{E}$ est donc $(2\,;\,-2)$.