∾ Corrigé du baccalauréat S Amérique du Nord ∾
30 mai 2014

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, tous les résultats demandés seront arrondis à 10^{-3} près.

Partie A : Conditionnement des pots

1. On veut $p(X \leqslant 49)$. Avec la calculatrice $p(X \leqslant 49) \approx 0.202$.
2. On note σ' le nouvel écart-type, et Z la variable aléatoire égale à $\dfrac{X-50}{\sigma'}$
   a. La variable aléatoire Z suit la loi normale centrée réduite.
   b. Une valeur approchée du réel u tel que $p(Z \leqslant u) = 0,06$ est $u \approx -1.555$.
   c. $Z = \dfrac{X-50}{\sigma'} \iff X = \sigma' Z + 50$
   $p(X \leqslant 49) = 0,06 \iff p\left(\sigma' Z + 50 \leqslant 49\right) = 0,06 \iff p\left(Z \leqslant -\dfrac{1}{\sigma'}\right) = 0,06$
   On doit donc avoir $-\dfrac{1}{\sigma'} = -1,555 \iff \sigma' = \dfrac{1}{1,555} \approx 0,643$
   La valeur attendue de σ' est donc $0,643$.
3. **a.** Ici, l'épreuve de Bernoulli consiste à tester si un pot est non conforme considéré comme succès de probabilité $0,06$,... ou pas.
   On répète 50 fois cette épreuve. Y suit donc la loi binomiale de paramètres 50 et $0,06$.
   b. On calcule $p(Y \leqslant 2)$ avec la calculatrice. La probabilité que la boutique reçoive deux pots non conformes ou moins de deux pots non conformes est d'environ $0,416$.

Partie B : Campagne publicitaire

On a $n = 140 > 30$, $\quad f = \dfrac{99}{140}$ donc $nf = 99 > 5$ et $n(1-f) = 41 > 5$. Ainsi, $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ soit $[0,622\ ;\ 0,792]$ est donc un intervalle de confiance au seuil de 95 % de la proportion de personnes satisfaites parmi les utilisateurs de la crème.

Exercice 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A : Positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = f(x) - (x-3)$.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$,
   $g(x) = 5\mathrm{e}^{-x} - 3\mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{-x}\left(5 - 3\mathrm{e}^{-x}\right)$.
   Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$ (exponentielle), $g(x)$ est du signe de $5 - 3\mathrm{e}^{-x}$.
   $5 - 3\mathrm{e}^{-x} > 0 \iff 5 > 3\mathrm{e}^{-x} \iff \dfrac{5}{3} > \mathrm{e}^{-x} \iff \ln\left(\dfrac{5}{3}\right) > -x \iff \ln\left(\dfrac{3}{5}\right) < x$ ce qui est toujours vrai car $\ln\left(\dfrac{3}{5}\right) < 0 < x$.
   Finalement, pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, $\quad g(x) > 0$.

2. La courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}$ ont un point commun d'abscisse x sssi $f(x) = x - 3$ soit $g(x) = 0$ ce qui n'est pas possible car on vient de voir que $g(x) > 0$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}$ n'ont pas de point commun.

Partie B : Étude de la fonction *g*

On note M le point d'abscisse x de la courbe $\mathscr{C}_f$, N le point d'abscisse x de la droite $\mathscr{D}$ et on s'intéresse à l'évolution de la distance MN.

1. Comme M et N ont la même abscisse, pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$,
$MN = |f(x) - (x-3)| = |g(x)| = g(x)$ car $g(x) > 0$ d'après la première question de la partie A.
2. Si u est dérivable, $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$.
La dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est donc $x \mapsto -\mathrm{e}^{-x}$ et celle de $x \mapsto \mathrm{e}^{-2x}$ est $x \mapsto -2\mathrm{e}^{-2x}$.
Pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, $g'(x) = -5\mathrm{e}^{-x} + 2 \times 3\mathrm{e}^{-2x} = 6\mathrm{e}^{-2x} - 5\mathrm{e}^{-x}$.
3. g étant dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, on étudie le signe de sa dérivée sur $[0\,;\,+\infty[$. Pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$,
$$\begin{aligned} g'(x) \geqslant 0 &\iff 6\mathrm{e}^{-2x} - 5\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0 \\ &\iff 6\mathrm{e}^{-x} - 5 \geqslant 0 && \text{on a simplifié par } \mathrm{e}^{-x} > 0 \\ &\iff \mathrm{e}^{-x} \geqslant \frac{5}{6} \\ &\iff -x \geqslant \ln\left(\frac{5}{6}\right) && \text{par croissance de la fonction } \ln \\ &\iff x \leqslant -\ln\left(\frac{5}{6}\right) \iff x \leqslant \ln\left(\frac{6}{5}\right) \end{aligned}$$
En $\ln\left(\frac{6}{5}\right)$, la dérivée s'annule en changeant de signe $(+;-)$, donc $g\left(\ln\left(\frac{6}{5}\right)\right)$ est un maximum pour g sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
$g\left(\ln\left(\frac{6}{5}\right)\right) = 5 \times \mathrm{e}^{-\ln\left(\frac{6}{5}\right)} - 3 \times \left(\mathrm{e}^{-\ln\left(\frac{6}{5}\right)}\right)^2 = 5 \times \mathrm{e}^{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} - 3 \times \left(\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}\right)^2 = 5 \times \frac{5}{6} - 3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{6} - \frac{25}{12} = \frac{50}{12} - \frac{25}{12} = \frac{25}{12}$.
La distance entre un point de la courbe $\mathscr{C}_f$ et le point de même abscisse sur la droite $\mathscr{D}$ est donc maximale lorsque $x = \ln\left(\frac{6}{5}\right)$. Cette distance maximale vaut $\frac{25}{12}$ unités.
Remarque : Comme le repère est orthogonal (à priori pas orthonormé), il s'agit d'unité en ordonnée.

Partie C : Étude d'une aire

On considère la fonction $\mathscr{A}$ définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$\mathscr{A}(x) = \int_0^x [f(t) - (t-3)]\,\mathrm{d}t.$$

1. $\mathscr{A}(2) = \int_0^2 [f(t) - (t-3)]\,\mathrm{d}t = \int_0^2 g(t)\,\mathrm{d}t$ et $g > 0$ sur $[0;2]$. $\mathscr{A}(2)$ mesure donc (en unités d'aires) l'aire du domaine limité par les droites d'équation $x = 0$, $x = 2$, la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}$.
2. La fonction g est continue sur $[0;+\infty[$ et $\mathscr{A}(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$, la fonction $\mathscr{A}$ est donc dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et $\mathscr{A}' = g > 0$. La fonction $\mathscr{A}$ est donc bien croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

3. Pour tout réel x strictement positif,

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}(x) &= \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t \\
&= 5\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t - 3\int_0^x \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= 5\left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x - 3\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right]_0^x \\
&= 5\left(-\mathrm{e}^{-x}+1\right) - 3\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}+\frac{1}{2}\right) \\
&= 5 - 5\mathrm{e}^{-x} + \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2x} - \frac{3}{2} \\
\mathscr{A}(x) &= \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2x} - 5\mathrm{e}^{-x} + \frac{7}{2}
\end{aligned}$$

4. $\mathscr{A}(x) = 2 \iff \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-2x} - 5\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{7}{2} = 2 \iff \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-2x} - 5\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{3}{2} = 0$

On pose $X = \mathrm{e}^{-x}$

$$\begin{aligned}
x \text{ solution de } \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2x} - 5\mathrm{e}^{-x} + \frac{3}{2} = 0 &\iff X \text{ solution de } \frac{3}{2}X^2 - 5X + \frac{3}{2} = 0 \\
&\iff X \text{ solution de } 3X^2 - 10X + 3 = 0 \qquad \text{équation du second degré} \\
&\iff X = \frac{1}{3} \text{ ou } X = 3 \\
&\iff \mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{3} \text{ ou } \mathrm{e}^{-x} = 3 \qquad \text{on revient à } x \text{ et } X = \mathrm{e}^{-x} \\
&\iff x = \ln 3 \text{ ou } x = -\ln 3 \qquad -\ln\frac{1}{3} = -(-\ln 3) = \ln 3 \\
&\iff x = \ln 3 \qquad \text{car } x \geqslant 0 \text{ et } -\ln 3 < 0
\end{aligned}$$

Finalement, $\mathscr{A}(x) = 2 \iff x = \ln 3$.

Exercice 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

Partie A : Section du cube par le plan (MNP)

1. Dans le plan (EFG), les droites (PM) et (FG) ne sont pas parallèles, elles sont donc sécantes.

2. a. Les droites (LN), (BF) et (CG) sont coplanaires (dans le plan (BCG))... d'où les constructions de T et Q.

b. L'intersection des plans (MNP) et (ABF) est une droite.

Plusieurs manières de faire cette construction :

— On peut construire 2 points de la droite intersection :

Q est un point de l'intersection des plans (MNP) (car appartient à (LN), où L et N sont dans (MNP)) et (ABF) (car appartient à (BF)).

Dans le plan (EFG), les droites (MP) et (EF) ne sont pas parallèles, donc elles sont sécantes en un point R qui est aussi un point de l'intersection des plans (MNP) (car sur (MP)) et (ABF) (car sur (EF)).

L'intersection des plans (MNP) et (ABF) est donc la droite (RQ)

— On peut utiliser un point et la direction

On a déjà vu que Q est un point de la droite cherchée.

Les deux plans (ABF) et (CDG) sont parallèles, ils sont donc coupés par le plan (MNP) selon deux droites parallèles. Or, les points P et T sont à la fois dans (MNP) et (CDG), donc l'intersection de ces deux plans est (PT).

L'intersection des plans (MNP) et (ABF) est donc la droite parallèle à (PT) passant par Q.

3. Notons S le point d'intersection de (AE) et (QR).

La section du cube par le plan (MNP) est le polygone MPTQS.

Partie B

1. M $\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,1\right)$, N$\left(1\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ et P$\left(\dfrac{1}{4}\,;\,1\,;\,1\right)$.

2. L est le point d'intersection de (MP) et (FG). On cherche donc une représentation paramétrique de chacune des deux droites (MP) et (FG).

   (MP) passe par M $\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,1\right)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}\left(\dfrac{1}{4}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,0\right)$, une représentation paramétrique de cette droite est donc : $\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{4}t \\ y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}t \\ z = 1 \end{array}\right.$ où $t \in \mathbb{R}$

   (FG) passe par F $(1\,;\,0\,;\,1)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}\,(0\,;\,1\,;\,0)$, une représentation paramétrique de cette droite est donc :

   $\left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = t' \\ z = 1 \end{array}\right.$ où $t' \in \mathbb{R}$

   $$L \in (MP)\cap(FG) \iff \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{4}t \\ y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}t \\ z = 1 \\ x = 1 \\ y = t' \\ z = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 1 = \dfrac{1}{4}t \\ y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}t \\ z = 1 \\ x = 1 \\ y = t' \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 4 = t \\ y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \times 4 \\ z = 1 \\ x = 1 \\ y = t' \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = \dfrac{5}{2} \\ z = 1 \\ t = 4 \\ t' = \dfrac{5}{2} \end{array}\right.$$

   Les coordonnées du point L sont $\left(1\,;\,\dfrac{5}{2}\,;\,1\right)$.

3. $\overrightarrow{TP}\left(-\dfrac{3}{4}\,;\,0\,;\,\dfrac{3}{8}\right)$ et $\overrightarrow{TN}\left(0\,;\,-\dfrac{1}{2}\,;\,-\dfrac{1}{8}\right)$.

   Le repère étant orthonormé, on peut utiliser l'expression analytique du produit scalaire :

   $\overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{TN} = -\dfrac{3}{8} \times \dfrac{1}{8} \neq 0$

   Le triangle TPN n'est donc pas rectangle en T.

Exercice 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un volume constant de 2 200 m^3 d'eau est réparti entre deux bassins A et B.

1. "Un volume constant de 2 200 m^3 d'eau est réparti entre deux bassins A et B." donc

   $$a_n + b_n = 2200.$$

2. Au début du $n+1$-ième jour, la bassin A contient a_n, on ajoute 15 % du volume d'eau présent dans le bassin B soit $0,15b_n$ et on enlève 10 % du volume présent dans A au début de la journée :

   $a_{n+1} = a_n + 0,15b_n - 0,1a_n = a_n + 0,15(2200 - a_n) - 0,1a_n = 0,75a_n + 330 = \dfrac{3}{4}a_n + 330.$

   On a bien, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \dfrac{3}{4}a_n + 330$.

3.

Variables	:	n est un entier naturel a est un réel
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0 Affecter à a la valeur 800
Traitement	:	Tant que $a < 1\,100$, faire : Affecter à a la valeur $\dfrac{3}{4}a + 330$ Affecter à n la valeur $n+1$ Fin Tant que
Sortie	:	Afficher n

4. **a.** Remarque : On peut calculer les premiers termes pour avoir la raison.

Pour tout entier naturel n, on a

$$\begin{array}{lll} u_{n+1} & = a_{n+1} - 1\,320 & \text{définition de } u_n \\ & = \frac{3}{4}a_n + 330 - 1\,320 & \text{question 2.} \\ & = \frac{3}{4}a_n - 990 & \\ & = \frac{3}{4}(a_n - 1320) & \\ & = \frac{3}{4}u_n & \text{définition de } u_n \end{array}$$

On reconnait la définition d'une suite géométrique de raison $\dfrac{3}{4}$. Son premier terme est $u_0 = a_0 - 1\,320 = 800 - 1\,320 = -520$

b. On a donc, pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 q^n = -520 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

Mais, par définition de u_n, on a

$u_n = a_n - 1320 \iff a_n = u_n + 1320 \iff a_n = 1\,320 - 520 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

5. On cherche à savoir si, un jour donné, les deux bassins peuvent avoir, au mètre cube près, le même volume d'eau.

Si ce jour arrive, on aura $a_n + b_n = 2a_n$ mais la conservation du volume global s'écrira alors $2a_n = 2\,200 \iff a_n = 1\,100$.

Il faut donc résoudre l'équation $1\,320 - 520 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 1\,100$ d'inconnue n.

$1\,320 - 520 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 1\,100 \iff 520 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 220 \iff \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = \dfrac{11}{26} \iff n \ln\left(\dfrac{3}{4}\right) = \ln\left(\dfrac{11}{26}\right)$

Finalement $n = \dfrac{\ln\left(\dfrac{11}{26}\right)}{\ln\left(\dfrac{3}{4}\right)} \approx 2,99$

Or : $a_3 = 1\,100{,}625$ et $b_3 = 1\,099{,}375$ donc $a_3 - b_3 = 1,25 > 1$.

Conclusion : les deux bassins n'auront jamais le même contenu à 1 mètre cube près.