

∞ Corrigé du baccalauréat S Amérique du Nord ∞
30 mai 2014

Exercice 1

5 points

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, tous les résultats demandés seront arrondis à 10^{-3} près.

Partie A : Conditionnement des pots

1. On veut $p(X \leq 49)$. Avec la calculatrice $p(X \leq 49) \approx 0.202$.
2. On note σ' le nouvel écart-type, et Z la variable aléatoire égale à $\frac{X-50}{\sigma'}$
 - a. La variable aléatoire Z suit la loi normale centrée réduite.
 - b. Une valeur approchée du réel u tel que $p(Z \leq u) = 0,06$ est $u \approx -1.555$.
 - c. $Z = \frac{X-50}{\sigma'} \iff X = \sigma'Z + 50$

$$p(X \leq 49) = 0,06 \iff p(\sigma'Z + 50 \leq 49) = 0,06 \iff p\left(Z \leq -\frac{1}{\sigma'}\right) = 0,06$$

$$\text{On doit donc avoir } -\frac{1}{\sigma'} = -1,555 \iff \sigma' = \frac{1}{1,555} \approx 0,643$$

La valeur attendue de σ' est donc 0,643.

3. a. Ici, l'épreuve de Bernoulli consiste à tester si un pot est non conforme considéré comme succès de probabilité 0,06,... ou pas.
On répète 50 fois cette épreuve. Y suit donc la loi binomiale de paramètres 50 et 0,06.
- b. On calcule $p(Y \leq 2)$ avec la calculatrice. La probabilité que la boutique reçoive deux pots non conformes ou moins de deux pots non conformes est d'environ 0,416.

Partie B : Campagne publicitaire

On a $n = 140 > 30$, $f = \frac{99}{140}$ donc $nf = 99 > 5$ et $n(1-f) = 41 > 5$. Ainsi, $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ soit $[0,622; 0,792]$ est donc un intervalle de confiance au seuil de 95 % de la proportion de personnes satisfaites parmi les utilisateurs de la crème.

Exercice 2

6 points

Commun à tous les candidats

Partie A : Positions relatives de \mathcal{C}_f et \mathcal{D}

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - (x-3)$.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[0; +\infty[$,
 $g(x) = 5e^{-x} - 3e^{-2x} = e^{-x}(5 - 3e^{-x})$.
Comme $e^{-x} > 0$ (exponentielle), $g(x)$ est du signe de $5 - 3e^{-x}$.
 $5 - 3e^{-x} > 0 \iff 5 > 3e^{-x} \iff \frac{5}{3} > e^{-x} \iff \ln\left(\frac{5}{3}\right) > -x \iff \ln\left(\frac{3}{5}\right) < x$ ce qui est toujours vrai car
 $\ln\left(\frac{3}{5}\right) < 0 < x$.
Finalement, pour tout réel x de l'intervalle $[0; +\infty[$, $g(x) > 0$.

2. La courbe \mathcal{C}_f et la droite \mathcal{D} ont un point commun d'abscisse x sssi $f(x) = x - 3$ soit $g(x) = 0$ ce qui n'est pas possible car on vient de voir que $g(x) > 0$.
La courbe \mathcal{C}_f et la droite \mathcal{D} n'ont pas de point commun.

Partie B : Étude de la fonction g

On note M le point d'abscisse x de la courbe \mathcal{C}_f , N le point d'abscisse x de la droite \mathcal{D} et on s'intéresse à l'évolution de la distance MN .

- Comme M et N ont la même abscisse, pour tout x de l'intervalle $[0; +\infty[$,
 $MN = |f(x) - (x - 3)| = |g(x)| = g(x)$ car $g(x) > 0$ d'après la première question.
- Si u est dérivable, $(e^u)' = u'e^u$.
La dérivée de $x \mapsto e^{-x}$ est donc $x \mapsto -e^{-x}$ et celle de $x \mapsto e^{-2x}$ est $x \mapsto -2e^{-2x}$.
Pour tout x de l'intervalle $[0; +\infty[$, $g'(x) = -5e^{-x} + 2 \times 3e^{-2x} = 6e^{-2x} - 5e^{-x}$.
- g étant dérivable sur $[0; +\infty[$, on étudie le signe de sa dérivée sur $[0; +\infty[$. Pour tout x de l'intervalle $[0; +\infty[$,

$$g'(x) \geq 0 \iff 6e^{-2x} - 5e^{-x} \geq 0$$

$$\iff 6e^{-x} - 5 \geq 0 \quad \text{on a divisé par } e^{-x} > 0$$

$$\iff e^{-x} \geq \frac{5}{6}$$

$$\iff -x \geq \ln\left(\frac{5}{6}\right) \quad \text{croissance de la fonction } \ln$$

$$\iff x \leq \ln\left(\frac{6}{5}\right)$$

En $\ln\left(\frac{6}{5}\right)$, la dérivée s'annule en changeant de signe (+; -), donc $g\left(\ln\left(\frac{6}{5}\right)\right)$ est un maximum pour g sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

$$g\left(\ln\left(\frac{6}{5}\right)\right) = 5 \times e^{\frac{5}{6}} - 3 \times \left(e^{\frac{5}{6}}\right)^2 = 5 \times \frac{5}{6} - 3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{36}$$

La distance entre un point de la courbe \mathcal{C}_f et le point de même abscisse sur la droite \mathcal{D} est donc maximale lorsque $x = \ln\left(\frac{6}{5}\right)$. Cette distance maximale vaut $\frac{75}{36}$ unités.

Remarque : Comme le repère est orthogonal (à priori pas orthonormé), il s'agit d'unité en ordonnée.

Partie C : Étude d'une aire

On considère la fonction \mathcal{A} définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^x [f(t) - (t - 3)] dt.$$

- $\mathcal{A}(2) = \int_0^2 [f(t) - (t - 3)] dt = \int_0^2 g(t) dt$ et $g > 0$ sur $[0; 2]$. $\mathcal{A}(2)$ mesure donc (en unités d'aires) l'aire du domaine limité par les droites d'équation $x = 0$, $x = 2$, la courbe \mathcal{C}_f et la droite \mathcal{D} .
- La fonction g est continue sur $[0; +\infty[$ et $\mathcal{A}(x) = \int_0^x g(t) dt$, la fonction \mathcal{A} est donc dérivable sur $[0; +\infty[$ et $\mathcal{A}' = g > 0$. La fonction \mathcal{A} est donc bien croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
- Pour tout réel x strictement positif,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(x) &= \int_0^x g(t) dt \\
 &= 5 \int_0^x e^{-t} dt - 3 \int_0^x e^{-2t} dt && \text{par linéarité de l'intégrale} \\
 &= 5 [-e^{-t}]_0^x - 3 \left[-\frac{1}{2} e^{-2t} \right]_0^x \\
 &= 5(-e^{-x} + 1) - 3 \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} + \frac{1}{2} \right) \\
 &= 5 - 5e^{-x} + \frac{3}{2} e^{-2x} - \frac{3}{2} \\
 \mathcal{A}(x) &= \frac{3}{2} e^{-2x} - 5e^{-x} + \frac{7}{2}
 \end{aligned}$$

$$4. \mathcal{A}(x) = 2 \iff \frac{3}{2} e^{-2x} - 5e^{-x} + \frac{7}{2} = 2 \iff \frac{3}{2} e^{-2x} - 5e^{-x} + \frac{3}{2} = 0$$

On pose $X = e^{-x}$

$$\begin{aligned}
 x \text{ solution de } \frac{3}{2} e^{-2x} - 5e^{-x} + \frac{3}{2} = 0 &\iff X \text{ solution de } \frac{3}{2} X^2 - 5X + \frac{3}{2} = 0 \\
 &\iff X \text{ solution de } 3X^2 - 10X + 3 = 0 && \text{équation du second degré} \\
 &\iff X = \frac{1}{3} \text{ ou } X = 3 \\
 &\iff e^{-x} = \frac{1}{3} \text{ ou } e^{-x} = 3 && \text{on revient à } x \text{ et } X = e^{-x} \\
 &\iff x = \ln 3 \text{ ou } x = -\ln 3 && -\ln \frac{1}{3} = -(-\ln 3) = \ln 3 \\
 &\iff x = \ln 3 && \text{car } x \geq 0 \text{ et } -\ln 3 < 0
 \end{aligned}$$

Finalement, $\mathcal{A}(x) = 2 \iff x = \ln 3$.

Exercice 3

4 points

Commun à tous les candidats

Partie A : Section du cube par le plan (MNP)

- Dans le plan (EFG), les droites (PM) et (FG) ne sont pas parallèles, elles sont donc sécantes.
- Les droites (LN), (BF) et (CG) sont coplanaires (dans le plan (BCG))... d'où les constructions de T et Q.
 - L'intersection des plans (MNP) et (ABF) est une droite.
Plusieurs manières de faire cette construction :
 - On peut construire 2 points de la droite intersection :
Q est un point de l'intersection des plans (MNP) (car appartient à (LN), où L et N sont dans (MNP)) et (ABF) (car appartient à (BF)).
Dans le plan (EFG), les droites (MP) et (EF) ne sont pas parallèles, donc elles sont sécantes en un point R qui est aussi un point de l'intersection des plans (MNP) (car sur (MP)) et (ABF) (car sur (EF)).
L'intersection des plans (MNP) et (ABF) est donc la droite (RQ)
 - On peut utiliser un point et la direction
On a déjà vu que Q est un point de la droite cherchée.
Les deux plans (ABF) et (CDG) sont parallèles, ils sont donc coupés par le plan (MNP) selon deux droites parallèles. Or, les points P et T sont à la fois dans (MNP) et (CDG), donc l'intersection de ces deux plans est (PT).
L'intersection des plans (MNP) et (ABF) est donc la droite parallèle à (PT) passant par Q.
- Notons S le point d'intersection de (AE) et (QR).
La section du cube par le plan (MNP) est le polygone MPTQS.

Partie B

1. $M\left(0; \frac{1}{2}; 1\right), N\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ et $P\left(\frac{1}{4}; 1; 1\right)$.

2. L est le point d'intersection de (MP) et (FG). On cherche donc une représentation paramétrique de chacune des deux droites (MP) et (FG).

(MP) passe par $M\left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; 0\right)$, une représentation paramétrique de cette droite est donc :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4}t \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

(FG) passe par F (1 ; 0 ; 1) et a pour vecteur directeur $\vec{v}(0; 1; 0)$, une représentation paramétrique de cette droite est donc :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t' \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{où } t' \in \mathbb{R}$$

$$L \in (MP) \cap (FG) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4}t \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ z = 1 \\ x = 1 \\ y = t' \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \frac{1}{4}t \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ z = 1 \\ x = 1 \\ y = t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = t \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 4 \\ z = 1 \\ x = 1 \\ y = t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{5}{2} \\ z = 1 \\ t = 4 \\ t' = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Les coordonnées du point L sont $\left(1; \frac{5}{2}; 1\right)$.

3. $\overrightarrow{TP}\left(-\frac{3}{4}; 0; \frac{3}{8}\right)$ et $\overrightarrow{TN}\left(0; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{8}\right)$.

Le repère étant orthonormé, on peut utiliser l'expression analytique du produit scalaire :

$$\overrightarrow{TP} \cdot \overrightarrow{TN} = -\frac{3}{8} \times \frac{1}{8} \neq 0$$

Le triangle TPN n'est donc pas rectangle en T.

Exercice 4

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un volume constant de 2200 m^3 d'eau est réparti entre deux bassins A et B.

1. "Un volume constant de 2200 m^3 d'eau est réparti entre deux bassins A et B." donc

$$a_n + b_n = 2200.$$

2. Au début du $n+1$ -ième jour, la bassin A contient a_n , on ajoute 15% du volume d'eau présent dans le bassin B soit $0,15b_n$ et on enlève 10% du volume présent dans A au début de la journée :

$$a_{n+1} = a_n + 0,15b_n - 0,1a_n = a_n + 0,15(2200 - a_n) - 0,1a_n = 0,75a_n + 330 = \frac{3}{4}a_n + 330.$$

On a bien, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 330$.

3.

Variables	:	n est un entier naturel a est un réel		
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0 Affecter à a la valeur 800		
Traitement	:	Tant que $a < 1100$, faire : <table style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <tr> <td>Affecter à a la valeur $\frac{3}{4}a + 330$</td> </tr> <tr> <td>Affecter à n la valeur $n + 1$</td> </tr> </table> Fin Tant que	Affecter à a la valeur $\frac{3}{4}a + 330$	Affecter à n la valeur $n + 1$
Affecter à a la valeur $\frac{3}{4}a + 330$				
Affecter à n la valeur $n + 1$				
Sortie	:	Afficher n		

4. a. Remarque : On peut calculer les premiers termes pour avoir la raison.

Pour tout entier naturel n , on a

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= a_{n+1} - 1320 && \text{définition de } u_n \\
 &= \frac{3}{4}a_n + 330 - 1320 && \text{question 2.} \\
 &= \frac{3}{4}a_n - 990 \\
 &= \frac{3}{4}(a_n - 1320) \\
 &= \frac{3}{4}u_n && \text{définition de } u_n
 \end{aligned}$$

On reconnaît la définition d'une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$. Son premier terme est

$$u_0 = a_0 - 1320 = 800 - 1320 = -520$$

- b. On a donc, pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 q^n = -520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Mais, par définition de u_n , on a

$$u_n = a_n - 1320 \iff a_n = u_n + 1320 \iff a_n = 1320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

5. On cherche à savoir si, un jour donné, les deux bassins peuvent avoir, au mètre cube près, le même volume d'eau.

Si ce jour arrive, on aura $a_n + b_n = 2a_n$ mais la conservation du volume global s'écrira alors $2a_n = 2200 \iff a_n = 1100$.

Il faut donc résoudre l'équation $1320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 1100$ d'inconnue n .

$$1320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 1100 \iff 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 220 \iff \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{11}{26} \iff n \ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln\left(\frac{11}{26}\right)$$

$$\text{Finalement } n = \frac{\ln\left(\frac{11}{26}\right)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} \approx 2,99$$

Or : $a_3 = 1100,625$ et $b_3 = 1099,375$ donc $a_3 - b_3 = 1,25 > 1$.

Conclusion : les deux bassins n'auront jamais le même contenu à 1 mètre cube près.