# Correction du Baccalauréat S Antilles-Guyane 19 juin 2018

**EXERCICE 1** **5 points**

COMMUN À TOUS LES CANDIDATS

L'exploitant d'une forêt communale décide d'abattre des arbres afin de les vendre, soit aux habitants, soit à des entreprises. On admet que :

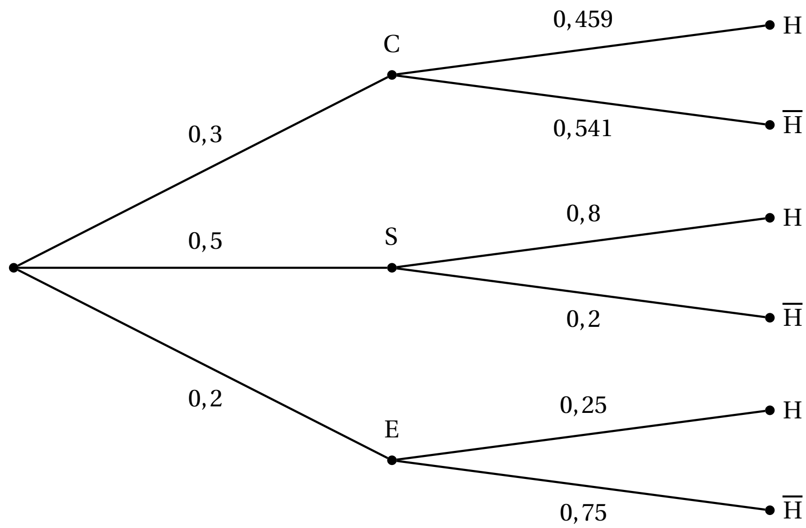
- parmi les arbres abattus, 30 % sont des chênes, 50 % sont des sapins et les autres sont des arbres d'essence secondaire (ce qui signifie qu'ils sont de moindre valeur) ;
- 45,9 % des chênes et 80 % des sapins abattus sont vendus aux habitants de la commune ;
- les trois quarts des arbres d'essence secondaire abattus sont vendus à des entreprises.

**Partie A**

Parmi les arbres abattus, on en choisit un au hasard.
On considère les événements suivants :

- C : « l'arbre abattu est un chêne » ;
- S : « l'arbre abattu est un sapin » ;
- E : « l'arbre abattu est un arbre d'essence secondaire » ;
- H : « l'arbre abattu est vendu à un habitant de la commune ».

1. Arbre :




2. $m(\text{C} \cap \text{H}) = p_{\text{C}}(\text{H}) \times p(\text{C}) = 0,459 \times 0,3 = 0,1377$.
   La probabilité que l'arbre abattu soit un chêne vendu à un habitant de la commune est 0,137 7.
3. On applique la formule de sprobabilités totales :
   $p(\text{H}) = p_{\text{C}}(\text{H}) \times p(\text{C}) + p_{\text{S}}(\text{H}) \times p(\text{S}) + p_{\text{E}}(\text{H}) \times p(\text{E}) = 0,1377 + 0,8 \times 0,5 + 0,25 \times 0,2 = \boxed{0,5877}$
4. $p_{\text{H}}(\text{S}) = \dfrac{p(\text{S} \cap \text{H})}{p(\text{H})} = \dfrac{0,4}{0,5877} \boxed{\approx 0,681}$ à $10^{-3}$ près.

**Partie B**

Le nombre d'arbres sur un hectare de cette forêt peut être modélisé par une variable aléatoire X suivant une loi normale d'espérance $\mu = 4000$ et d'écart-type $\sigma = 300$.

1. $p(3400 \leqslant \text{X} \leqslant 4600) = p(\mu - 2\sigma \leqslant \text{X} \leqslant \mu + 2\sigma) \boxed{\approx 0,954}$.

**2.** $p(X \geqslant 4500) = 1 - p(X < 4500) \boxed{\approx 0,048}$ arrondi à $10^{-3}$

**Partie C**

L'exploitant affirme que la densité de sapins dans cette forêt communale est de 1 sapin pour 2 arbres.

La proportion théorique de sapins est $p = 0,5$.

- La taille de l'échantillon est $n = 200 \geqslant 25$.
- $np = 0,5 \times 200 = 100 \geqslant 25$
- $n(1-p) = 100 \geqslant 25$

Les conditions sont réunies pour qu'on puisse utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 0,95.

Cet intervalle est $I_{0,95} = \left[p - 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,5 - 1,96\dfrac{0,5}{\sqrt{200}}\ ;\ 0,5 + 1,96\dfrac{0,5}{\sqrt{200}}\right]$
$\approx \boxed{[0,430\ ;\ 0,570]}$.

La fréquence observée dans cet échantillon est $f = \dfrac{106}{200} = 0,53$ ; $\boxed{f \in I_{0,95}}$.

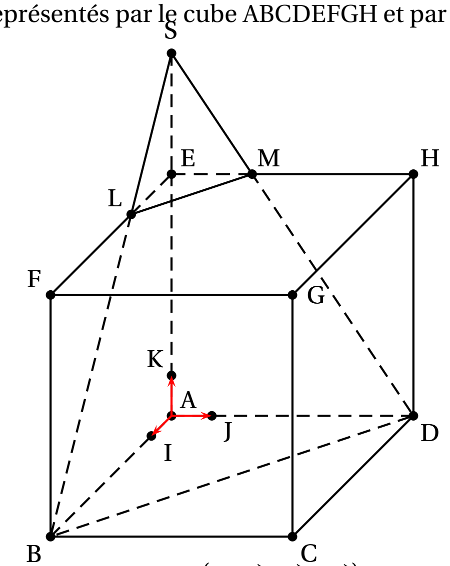
Ce résultat ne remet pas en cause l'affirmation de l'exploitant.

## Exercice 2 — 5 points

Commun à tous les candidats

Un artiste souhaite réaliser une sculpture composée d'un tétraèdre posé sur un cube de 6 mètres d'arête.

Ces deux solides sont représentés par le cube ABCDEFGH et par le tétraèdre SELM ci-dessous.




On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK}\right)$ tel que : $I \in [AB]$, $J \in [AD]$, $K \in [AE]$ et $AI = AJ = AK = 1$, l'unité graphique représentant 1 mètre.

Les points L, M et S sont définis de la façon suivante :

- L est le point tel que $\overrightarrow{FL} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{FE}$ ;
- M est le point d'intersection du plan (BDL) et de la droite (EH) ;
- S est le point d'intersection des droites (BL) et (AK).

**1.** Les droites (LM) et (BD) sont **coplanaires** (dans le plan (BDS)) et contenues respectivement dans les plans (ABD) et (EFH) qui sont **parallèles**, donc elles sont **parallèles**.

**2.** $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EL} = 6\overrightarrow{AK} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = 6\overrightarrow{AK} + 2\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AI} + 0\overrightarrow{AJ} + 6\overrightarrow{AK}$ donc les coordonnées de L sont $\boxed{L(2\,;\,0\,;\,6)}$.

**3.** **a.** $\overrightarrow{BL}\begin{pmatrix}-4\\0\\6\end{pmatrix}$ et $B(6\,;\,0\,;\,0)$.

Un représentation paramétrique de (BL) est alors : $\boxed{(BL)\begin{cases}x=6-4t\\y=0\\z=6t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}}$.

**b.** S appartient au plan (BDL) et à la droite (AE) donc :

$\begin{cases}x=6-4t\\y=0\\z=6t\\x=y=0\end{cases}$. On en déduit $t=\frac{3}{2}$ d'où $\boxed{S(0\,;\,0\,;\,9)}$.

**4.** Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}$.

**a.**
- $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-6\\6\\0\end{pmatrix}$ donc $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD} = 3\times(-6)+3\times 6+2\times 0 = 0$ donc $\vec{n}\perp\overrightarrow{BD}$.
- $\overrightarrow{BL}\begin{pmatrix}-4\\0\\6\end{pmatrix}$ donc $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BL} = 3\times(-4)+3\times 0+2\times 6 = 0$ donc $\vec{n}\perp\overrightarrow{BL}$.
- $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan BDL donc est normal à ce plan.

**b.** Une équation du plan BDL est alors : $3(x-x_B)+3(y-y_B)+2(z-z_B)=0$
$\Leftrightarrow 3(x-6)+3y+2z=0 \Leftrightarrow \boxed{3x+3y+2z-18=0}$.

**c.** On admet que la droite (EH) a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases}x &= 0\\ y &= s \quad (s\in\mathbb{R})\\ z &= 6\end{cases}$$

M est l'intersection du plan (BDL) et de la droite EH donc ses coordonnées vérifient l'équation du plan et la représentation paramétrique de la droite.

On doit avoir : $\begin{cases}x=0\\y=s\\z=6\\3x+3y+2z-18=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\y=s\\z=6\\3x+12-18=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}s=2\\x=0\\y=z\\z=6\end{cases}$.

M a donc pour coordonnée $\boxed{M(0\,;\,2\,;\,6)}$.

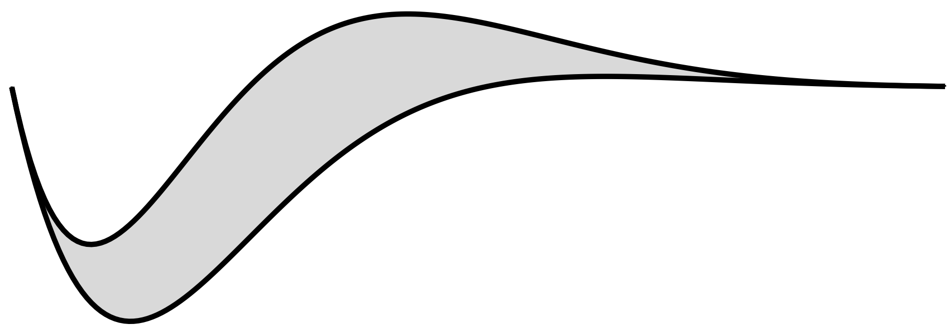
**5.** L'aire du triangle ELM est $\mathscr{A}(ELM) = \frac{EL\times EM}{2} = \frac{2\times 2}{2} = 2$.
La hauteur SE vaut $SE = AS - AE = 9-6 = 3$.
Le volume du tétraèdre SELM est alors : $\mathscr{V} = \frac{1}{3}\times 2\times 3 = 2\ \text{m}^3$.

6. L'artiste souhaite que la mesure de l'angle $\widehat{\text{SLE}}$ soit comprise entre 55° et 60°.
Le triangle SLE est rectangle en E : $\cos\left(\widehat{\text{SLE}}\right) = \dfrac{\text{LE}}{\text{LS}}$.
Or $\text{LS} = \sqrt{(x_\text{S} - x_\text{E})^2 + \left(y_\text{S} - y_\text{L}\right)^2 + (z_\text{S} - z_\text{L})^2} = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$.
Donc $\cos\left(\widehat{\text{SLE}}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$ ; on en déduit que $\widehat{\text{SLE}} \approx 56,3°$ ; la contrainte est respectée.

**EXERCICE 3** **5 POINTS**

COMMUN À TOUS LES CANDIDATS

Un publicitaire souhaite imprimer le logo ci-dessous sur un T-shirt :



Il dessine ce logo à l'aide des courbes de deux fonctions $f$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \text{e}^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) \quad \text{et} \quad g(x) = -\text{e}^{x}\cos x.$$

On admet que les fonctions $f$ et $g$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

**Partie A — Étude de la fonction $f$**

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $\begin{cases} -1 \leqslant -\cos x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \\ 1 \leqslant 1 \leqslant 1 \end{cases}$ donc par somme : $\boxed{-1 \leqslant -\cos x + \sin x \leqslant 3}$.
Comme $\text{e}^{-x} > 0$, on en déduit :
$$\boxed{-\text{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 3\text{e}^{-x}}$$
.

2. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \text{e}^{-x} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes,
$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$$
.

3. $f$ est le produit de deux fonctions :
$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = -\text{e}^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) + \text{e}^{-x}(\sin x + \cos x) = \text{e}^{-x}(2\cos x - 1)$ donc
$$\boxed{f'(x) = \text{e}^{-x}(2\cos x - 1)}$$
.

**4.** Dans cette question, on étudie la fonction $f$ sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$.

**a.** Comme $\text{e}^{-x} > 0$ $f'(x)$ est du signe de $u(x) = 2\cos x - 1$. $u(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{\pi}{3}$.

$2\cos x - 1 > 0 \Leftrightarrow \cos x > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left]-\dfrac{\pi}{3}\,;\,\dfrac{\pi}{3}\right[$.

Signe de $f'(x)$ :

| $x$ | $-\pi$ | | $-\frac{\pi}{3}$ | | $\frac{\pi}{3}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

**b.** On en déduit les variations de $f$ sur $[-\pi\,;\,\pi]$ :

| $x$ | $-\pi$ | | $-\frac{\pi}{3}$ | | $\frac{\pi}{3}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $2\text{e}^{\pi}$ | $\searrow$ | $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\text{e}^{\frac{\pi}{3}}$ | $\nearrow$ | $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\text{e}^{-\frac{\pi}{3}}$ | $\searrow$ | $2\text{e}^{-\pi}$ |

**Partie B — Aire du logo**

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions $f$ et $g$ dans un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$. L'unité graphique est de 2 centimètres. Ces deux courbes sont tracées en ANNEXE.

**1.** $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - g(x) = \text{e}^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) - \left(-\text{e}^{-x}\cos x\right) = \text{e}^{-x}(\sin x + 1)$.

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin x \geqslant -1$ donc $\sin x + 1 \geqslant 0$ donc $f(x) - g(x) \geqslant 0$ donc $f(x) \geqslant g(x)$.

La courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$ (avec points communs pour $\sin x = -1$, donc pour $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$).

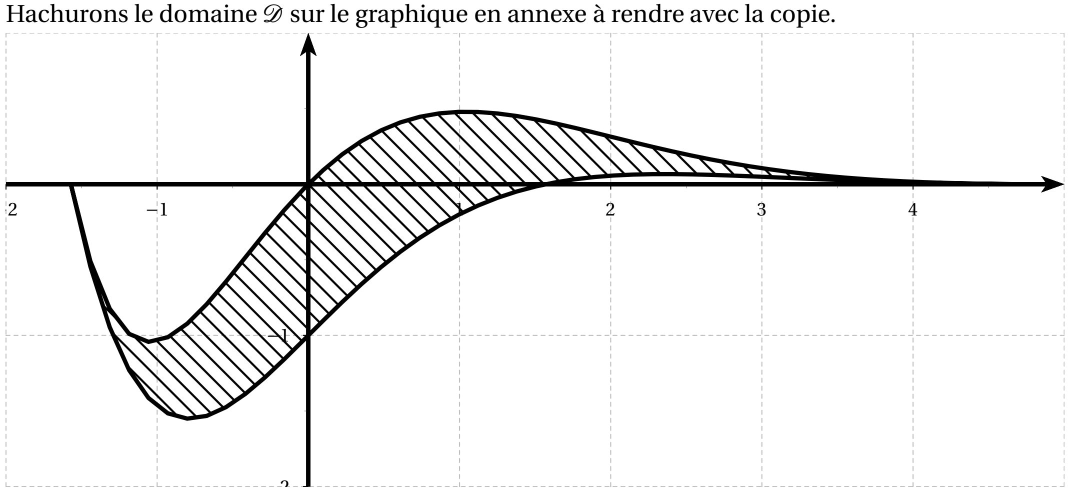
**2.** Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{H}(x) = \left(-\frac{\cos x}{2} - \frac{\sin x}{2} - 1\right)\text{e}^{-x}.$$

On admet que H est une primitive de la fonction $x \mapsto (\sin x + 1)\text{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

On note $\mathscr{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, la courbe $\mathscr{C}_g$ est les droites d'équation $x = -\dfrac{\pi}{2}$ et $x = \dfrac{3\pi}{2}$.

**a.** Hachurons le domaine $\mathscr{D}$ sur le graphique en annexe à rendre avec la copie.



**b.** L'aire vaut $\mathcal{A} = \mathrm{H}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) - \mathrm{H}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \boxed{-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{2}} + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}$.

$\mathcal{A} \approx 2,4$ u.a., donc $\mathcal{A} \approx 9,6$ cm².

## EXERCICE 4 — 5 POINTS

CANDIDATS N'AYANT PAS SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3 000 cétacés dans cette réserve au 1er juin 2017. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2 000.

Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

- entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine ;
- entre le 1er novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite $(u_n)$. Selon ce modèle, pour tout entier naturel $n$, $u_n$ désigne le nombre de cétacés au 1er juin de l'année $2017 + n$. On a donc $u_0 = 3000$.

**1.** $u_1 = (u_0 + 80) \times 0,95 = 0,95 \times 3080 = 2926$.

**2.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (u_n + 80) \times 0,95 = \boxed{0,95u_n + 76}$.

**3.** À l'aide d'un tableur, on a calculé les 8 premiers termes de la suite $(u_n)$. Le directeur a configuré le format des cellules pour que ne soient affichés que des nombres arrondis à l'unité.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | $u_n$ | 3 000 | 2 926 | 2 856 | 2 789 | 2 725 | 2 665 | 2 608 | 2 553 |

En C2, on doit taper « =0.95*B2+76 »

**4.** **a.** Montrons par récurrence que, pour tout $n$, $u_n \geqslant 1520$.

- Initialisation : $u_0 = 3000 \geqslant 1520$ donc la propriété est vraie au rang 0.
- On suppose que $u_n \geqslant 1520$ pour un entier $n$ quelconque.
  Alors : $0,95u_n \geqslant 0,95 \times 1520$ d'où $0,95u_n + 76 \geqslant 0,95 \times 1520 + 76 = 1520$ donc la propriété est héréditaire.

D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n$.

**b.** Pour tout $n$, $u_{n+1} - u_n = 0,95u_n + 76 - u_n = -0,05u_n + 76 = -0,05(u_n - 1520) \leqslant 0$ car on a montré que $u_n \geqslant 1520$.

La suite $(u_n)$ est bien décroissante.

**c.** La suite $(u_n)$ est décroissante et minée par 1 250, donc convergente.

**5.** On désigne par $(v_n)$ la suite définie par, pour tout entier naturel $n$, $v_n = u_n - 1520$.

**a.** Pour tout $n$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 1520 = 0,95u_n + 76 - 1520 = 0,95u_n - 1444 = 0,95(u_n - 1520) = \boxed{0,95v_n}$.

La suite $(v_n)$ est géométrique, de raison $q = 0,95$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 1520 = 3000 - 1520 = 1480$.

**b.** Par conséquent, puisque $(v_n)$ est géométrique, $v_n = v_0 q^n = 1480 \times 0,95^n$ donc $\boxed{u_n = 1480 \times 0,95^n + 1520}$.

**c.** $-1 < 0,95 < 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0,05^n = 0$ d'où $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1520}$.

**6.** Recopier et compléter l'algorithme suivant pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieur à 2 000.

```
n ← 0
u ← 3000
Tant que u> 2000
    n ← n+1
    u ← 0.95*u+76
Fin de Tant que
```

**7.** On a vu que la limite de la suite est 1 520 donc il y a une valeur de la suite pour laquelle $u_n < 1200$.
On trouve $\boxed{n = 22}$.

**EXERCICE 4** **5 POINTS**

CANDIDATS AYANT SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le droit de pêche dans une réserve marine est réglementé : chaque pêcheur doit posséder une carte d'accréditation annuelle. Il existe deux types de cartes :

- une carte de pêche dite « libre » entre parenthèse le pêcheur mais pas limité en nombre de poissons pêchés) ;
- une carte de pêche dite « avec quota »(le pêcheur ne doit pas dépasser une certaine quantité hebdomadaire de poisson).

On suppose que le nombre total de pêcheurs reste constant d'année en année.
On note, pour l'année $2017 + n$ :

- $\ell_n$ la proportion de pêcheurs possédant la carte de pêche libre ;
- $q_n$ la proportion de pêcheurs possédant la carte de pêche avec quota.

On observe que :

- chaque année, 65 % des possesseurs de la carte de pêche libres achète de nouveaux une carte de pêche libre l'année suivante ;
- Chaque année, 45 % des possesseurs de la carte de pêche avec quota acheté une carte de pêche libre l'année suivante ;
- En 2017, 40 % des pêcheurs ont acheté une carte de pêche libre. On a donc $\ell_0 = 0{,}4$ et $q_0 = 0{,}6$.

On note, pour tout entier naturel $n$, $\mathrm{P}_n = \begin{pmatrix}\ell_n\\ q_n\end{pmatrix}$.

**1.** Il est clair que $\mathrm{P}_{n+1} = \mathrm{MP}_n$, où M est la matrice carrée $\begin{pmatrix}0{,}65 & 0{,}45\\ 0{,}35 & 0{,}55\end{pmatrix}$.

**2.** 2019 correspond à $n = 2$.

$\mathrm{P}_2 = \mathrm{M}^2\mathrm{P}_0 = \begin{pmatrix}0{,}65 & 0{,}45\\ 0{,}35 & 0{,}55\end{pmatrix}^2 \times \begin{pmatrix}0,4\\ 0,6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,556\\ 0,444\end{pmatrix}$ (à la calculatrice).

La proportion de pêcheurs achetant une carte de pêche avec quota en 2019 est donc $\boxed{q_2 = 0,444}$.

**3.** Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

| | |
|---|---|
| 1 $\circ$ | M := {{0,65, 0,45}, {0,35, 0,55}}<br>$\checkmark\ \mathrm{M} := \begin{pmatrix}0.65 & 0.45\\0.35 & 0.55\end{pmatrix}$ |
| 2 $\circ$ | $\mathrm{P}_0$ := {{0.4}, {0.6}}<br>$\checkmark\ \mathrm{P}_0 := \begin{pmatrix}0.4\\0.6\end{pmatrix}$ |
| 3 $\circ$ | Q := {{9, 1}, {7,-1}}<br>$\checkmark\ \mathrm{Q} := \begin{pmatrix}9 & 1\\7 & -1\end{pmatrix}$ |
| 4 $\circ$ | T := {{1/16, 1/16}, {7/16,-9/16}}<br>$\checkmark\ \mathrm{T} := \begin{pmatrix}\frac{1}{16} & \frac{1}{16}\\\frac{7}{16} & -\frac{9}{16}\end{pmatrix}$ |

| | |
|---|---|
| 5 $\circ$ | TQ<br>$\rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ |
| 6 $\circ$ | QT<br>$\rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ |
| 7 $\circ$ | D := TMQ<br>$\rightarrow\ \mathrm{D} := \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$ |

**a.** Le déterminant de Q est $9\times(-1)-7\times 1=-16\neq 0$ donc Q est inversible.

Alors $\mathrm{Q}^{-1}=\dfrac{1}{-16}\begin{pmatrix}-1 & -1\\-7 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{16} & \frac{1}{16}\\\frac{7}{16} & -\frac{9}{16}\end{pmatrix}$

**b.** $\mathrm{QDQ}^{-1}=\begin{pmatrix}9 & 1\\7 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & \frac{1}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{16} & \frac{1}{16}\\\frac{7}{16} & -\frac{9}{16}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & \frac{1}{5}\\7 & -\frac{1}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{16} & \frac{1}{16}\\\frac{7}{16} & -\frac{9}{16}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,65 & 0,45\\0,35 & 0,55\end{pmatrix}=\mathrm{M}$ donc $\boxed{\mathrm{M}=\mathrm{QDQ}^{-1}}$.

**4.** On admet que, pour tout entier naturel $n$ non nul,

$$\mathrm{M}^n=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}9+7\times 0{,}2^n & 9-9\times 0{,}2^n\\7-7\times 0{,}2^n & 7+9\times 0{,}2^n\end{pmatrix}.$$

**a.** Démontrons par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathrm{P}_n=\mathrm{M}^n\mathrm{P}_0$.

- Initialisation : Pour $n=0$, $\mathrm{M}^0\mathrm{P}_0=\mathrm{P}_0$ donc la propriété est vraie au rang 0.
- On suppose que $\mathrm{P}_n=\mathrm{M}^n\mathrm{P}_0$ pour un entier $n$ quelconque.
  Alors : $\mathrm{P}_{n+1}=\mathrm{MP}_n=\mathrm{MM}^n\mathrm{P}_0=\mathrm{M}^{n+1}\mathrm{P}_0$ donc la propriété est héréditaire.

/a propriété est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang$n$ elle l'est au rang $n+1$. D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n$.

**b.** Par conséquent : $\mathrm{M}_n=\begin{pmatrix}l_n\\q_n\end{pmatrix}=\mathrm{M}^n\mathrm{P}_0=\dfrac{1}{16}\begin{pmatrix}9+7\times 0{,}2^n & 9-9\times 0{,}2^n\\7-7\times 0{,}2^n & 7+9\times 0{,}2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}4\\0{,}6\end{pmatrix}$.

On en déduit que $\ell_n=\dfrac{1}{16}\left[9\times 0,4+7\times 0,2^n\times 0,4+9\times 0,6-9\times 0,6\times 0,2^n\right]=\dfrac{1}{16}\left(9-2,6\times 0,2^n\right)=\boxed{\dfrac{9}{16}-\dfrac{13}{16}\times 0,2^n}$.

**5.** Pour tout $n$, $\ell_n\leqslant\dfrac{9}{16}=0,5625=\dfrac{56,25}{100}=56,25\,\%$ donc la proportion de pêcheurs achetant la carte de pêche libre ne dépasse pas 60 %.