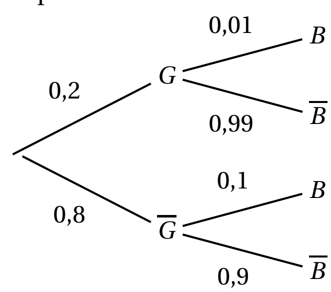
Corrigé du baccalauréat S Antilles–Guyane juin 2002

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. On peut dresser un arbre pondéré



D'où : $p(A) = p(G) \times p_G(B) = 0,2 \times 0,01 = 0,002$.

D'autre part $p\left(\overline{G} \cap B\right) = p\left(\overline{G}\right) \times p_{\overline{G}}(B) = 0,8 \times 0,1 = 0,08$.

D'après la loi des probabilités totales :

$p(B) = p(G \cap B) + p\left(\overline{G} \cap B\right) = 0,002 + 0,08 = 0,082$.

2. Il faut trouver $p_B(G) = \dfrac{p(B \cap G)}{p(B)} = \dfrac{0,002}{0,082} = \dfrac{2}{82} = \dfrac{1}{41}$.

3. Les probabilités sont respectivement égales à : $p(G) = 0,2$;
$p\left(\overline{G} \cap \overline{B}\right) = 0,8 \times 0,9 = 0,72$ et $p\left(\overline{G} \cap B\right) = 0,8 \times 0,1 = 0,08$ avec des valeurs de la variable aléatoire X : 0, 80 et 280 euros.

D'où le tableau de la loi :

X	0	80	280
p	0,2	0,72	0,08

D'où l'espérance mathématique $E = 0 \times 0,2 + 80 \times 0,72 + 280 \times 0,08 = 57,6 + 22,4 = 80$ (€)

4. La probabilité qu'une chaudière défectueuse soit hors garantie est

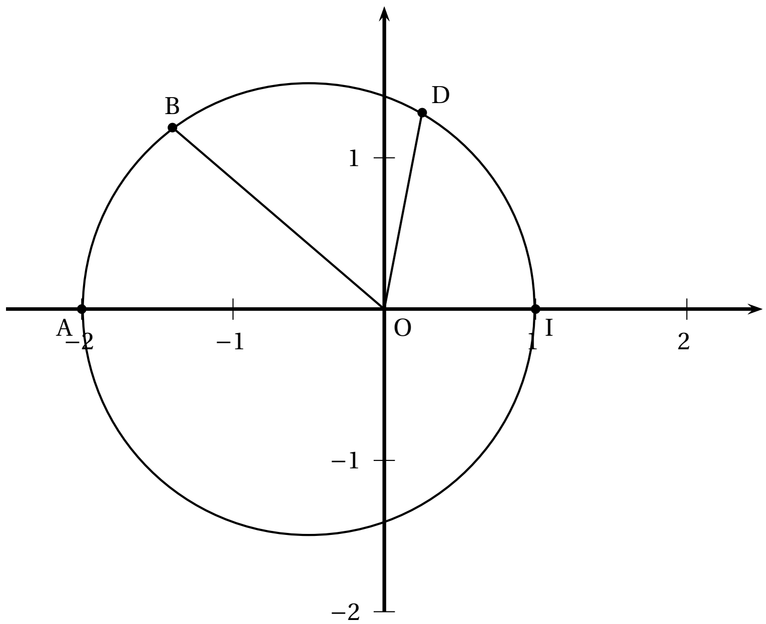
$p_B\left(\overline{G}\right) = \dfrac{p\left(B \cap \overline{G}\right)}{p(B)} = \dfrac{0,08}{0,082} = \dfrac{80}{82} = \dfrac{40}{41}$.

La probabilité que les 5 chaudières défectueuses soit hors garantie est donc $\left(\dfrac{40}{41}\right)^5$

Enfin la probabilité contraire qu'au moins une des 5 soit sous garantie est donc égale à $1 - \left(\dfrac{40}{41}\right)^5 \approx 0,12$ au centième près.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire



1. On a $b = \dfrac{1+4\text{i}}{1-2\text{i}} = \dfrac{(1+4\text{i})(1+2\text{i})}{(1-2\text{i})(1+2\text{i})} = \dfrac{1-8+2\text{i}+4\text{i}}{1+4} = \dfrac{-7+6\text{i}}{5} = -\dfrac{7}{5} + \dfrac{6}{5}\text{i}$.

K étant le milieu de [IA] son affixe est égale à $\dfrac{1-2}{2} = -\dfrac{1}{2}$. Le rayon du cercle $(\mathscr{C})$ est donc égal à $-0,5+2 = 1-(-0,5) = 1,5$.

D'où $\text{KB}^2 = \left(-\dfrac{7}{5} - \left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)^2 + \left(\dfrac{6}{5}\right)^2 = \left(-\dfrac{7}{5} + \left(\dfrac{1}{2}\right)\right)^2 + \left(\dfrac{6}{5}\right)^2 = \left(\dfrac{-14+5}{10}\right)^2 + \left(\dfrac{6}{5}\right)^2 = \dfrac{81}{100} + \dfrac{36}{25} = \dfrac{81}{100} + \dfrac{144}{100} = \dfrac{225}{100} = \left(\dfrac{15}{10}\right)^2$.

D'où $\text{KB} = \dfrac{15}{10} = 1,5$. Donc $\text{B} \in (\mathscr{C})$.

2. a. Puisque D est un point du cercle, $\text{KD} = 1,5 = |d-(-0,5)| = |d+0,5| = 1,5$.

D'autre part par définition $d + \dfrac{1}{2}$ a un argument de $\dfrac{\pi}{3}$.

b. De la question précédente on peut écrire sous forme exponentielle :

$d + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}} = \dfrac{3}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + \text{i}\sin\frac{\pi}{3}\right) = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{3}{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3}{4} + \text{i}\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

On a donc $d = \dfrac{3}{4} + \text{i}\dfrac{3\sqrt{2}}{4} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4} + 3\text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

c. $\dfrac{1+2\text{i}a}{1-\text{i}a} = \dfrac{(1+2\text{i}a)(1+\text{i}a)}{(1-\text{i}a)(1+\text{i}a)} = \dfrac{1-2a^2+\text{i}(a+2a)}{1+a^2} = \dfrac{1-2a^2+3a\text{i}}{1+a^2}$.

En identifiant parties réelles et parties imaginaires, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{1-2a^2}{1+a^2} & = & \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{3a}{1+a^2} & = & \dfrac{3\sqrt{3}}{4} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 4-8a^2 & = & 1+a^2 \\ 12a & = & 3\sqrt{3}+3\sqrt{3}a^2 \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} 3 & = & 9a^2 \\ 4a & = & \sqrt{3}+\sqrt{3}a^2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} \frac{1}{3} & = & a^2 \\ 4a & = & \sqrt{3}+\sqrt{3}a^2 \end{array}\right. ,$$

d'où en remplaçant dans la deuxième équation a^2 par $\frac{1}{3}$:

$4a = \sqrt{3} + \sqrt{3} \times \frac{1}{3} = \dfrac{4}{3}\sqrt{3}$ et enfin $a = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

3. $Z = \dfrac{\dfrac{1+2\mathrm{i}x}{1-\mathrm{i}x}-1}{\dfrac{1+2\mathrm{i}x}{1-\mathrm{i}x}+2} = \dfrac{1+2\mathrm{i}x-1+\mathrm{i}x}{1+2\mathrm{i}x+2-2\mathrm{i}x} = \dfrac{3\mathrm{i}x}{3} = \mathrm{i}x$; donc Z est un imaginaire pur.

Or $Z = \dfrac{(m-1)}{(m-(-2)}$; donc un argument de Z est $\left(\overrightarrow{\mathrm{A}M}, \overrightarrow{\mathrm{I}M}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ puisque Z est un imaginaire pur. Ceci prouve que le triangle AIM est rectangle en M. Comme l'hypoténuse est [AI], M est quel que soit le réel x un point du cercle $(\mathscr{C})$.

4. On peut faire la réciproque de la question précédente.

Si N d'affixe n appartient à $(\mathscr{C})$, alors le triangle AIN est rectangle en N, donc $Z' = \dfrac{(n-1)}{(n-(-2))}$ est un imaginaire pur. Il existe donc un réel y tel que :

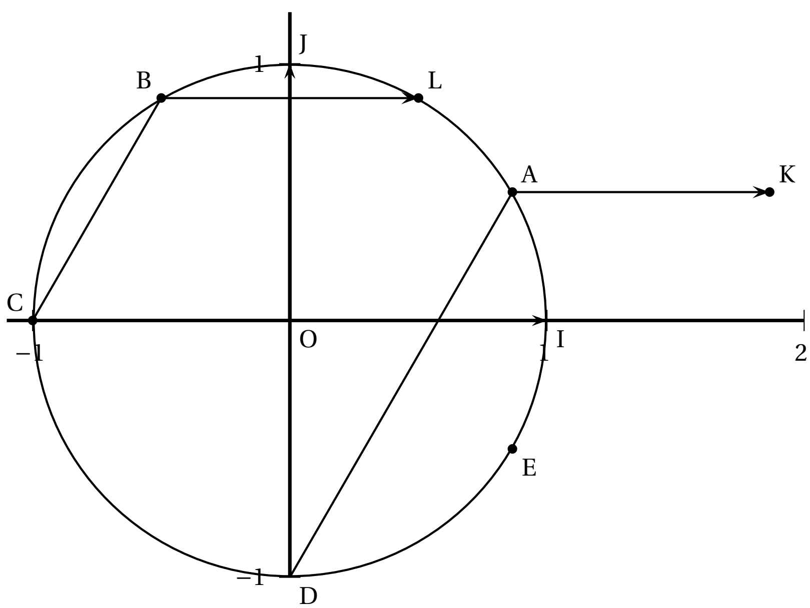
$$Z' = \mathrm{i}y = \dfrac{3\mathrm{i}y}{3} = \dfrac{1+2\mathrm{i}y-1+\mathrm{i}y}{1+2\mathrm{i}y+2-2\mathrm{i}y} = \dfrac{\dfrac{1+2\mathrm{i}y}{1-\mathrm{i}y}-1}{\dfrac{1+2\mathrm{i}y}{1-\mathrm{i}y}+2} = \dfrac{n-1}{n+2}.$$

Donc par identification : $n = \dfrac{1+2\mathrm{i}y}{1-\mathrm{i}y}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

1. a.



b. • Toutes les affixes sont des complexes de module 1 : tous les points A, B, C, D et E appartiennent donc au cercle unitaire.

Z_{A} a un argument de $\frac{\pi}{6}$, Z_{E} a un argument de $-\frac{\pi}{6}$, donc $\widehat{\mathrm{EOA}} = \frac{\pi}{3}$: le triangle EOA est isocèle en O avec un angle au sommet de $\frac{\pi}{3}$: il est donc équilatéral.

De même Z_{D} a un argument de $-\frac{\pi}{3}$, donc $\widehat{\mathrm{DOE}} = \frac{\pi}{3}$; le triangle DOE isocèle en O a un angle au sommet de $\frac{\pi}{3}$: il est donc équilatéral.

On a donc OA = OE = AE = OD = DE = 1 ; donc en particulier EA = ED.

• L'arc $\widehat{\mathrm{EB}}$ correspond à un angle au centre de $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

L'arc $\widehat{\mathrm{EC}}$ correspond à un angle au centre de $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$.

Conclusion : les cordes EB et EC ont la même longueur.

- On a vu que E est équidistant de A et de E; on a aussi O équidistant de A et de E, donc la droite (OE) est la médiatrice de [AD] ; de même (OE) est médiatrice de [BC].

c. translation t de vecteur $\overrightarrow{\text{OI}}$. Placer les points K et L sur la figure. Puisque $\text{A}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$, L translaté de 1 vers la droite à pour coordonnées $\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.

De même puisque $\text{B}\left(-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, alors $\text{L}\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2. a. On sait que l'application S définie par $M(Z) \longmapsto M_1\left(\overline{Z}\right)$ est la symétrie axiale d'axe (OI).

Soit le complexe $a = \dfrac{1}{2} - \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; on a $|a|^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$, d'où $|a| = 1$.

On a $a = 1\left(\cos\frac{-\pi}{3} + \text{i}\sin\frac{-\pi}{3}\right) = \text{e}^{-\frac{\pi}{3}}$.

On sait que l'application R qui à z associe $z\text{e}^{-\frac{\pi}{3}}$ est la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$.

On a donc $F = R \circ S$.

b. Comme produit d'un anti-déplacement par un déplacement, R est un anti-déplacement.

Or $F(\text{O}) = R \circ S(\text{O}) = R[S(\text{O})] = R(\text{O}) = \text{O}$.

$F(\text{E}) = R \circ S(\text{E}) = R[S(\text{E})] = R(\text{A}) = \text{E}$.

L'anti-déplacement a deux points fixes : c'est donc la réflexion d'axe (OE).

3. La translation T de vecteur $\overrightarrow{\text{OI}}$ est définie de façon complexe par $z'' = z' + 1$.

M a pour image M' par F et M' a pour image M'' par T, donc M est transformé en M'' par $T \circ F$.

$G = T \circ F$ composée d'un d'un anti-déplacement par un déplacement est un anti-déplacement.

PROBLÈME — 11 points

$$f_n(x) = \frac{\text{e}^{(1-n)x}}{1+\text{e}^x}$$

Partie A - Étude de f_0 et de f_1

1.
- On a $\lim\limits_{-\infty} \text{e}^x = 0$, donc $\lim\limits_{-\infty} 1 + \text{e}^x = 1$ et par quotient de limites $\lim\limits_{-\infty} f_0(x) = 0$.
- On a en multipliant chaque terme par e^{-x}, $f_0(x) = \dfrac{1}{\text{e}^{-x}+1}$.

On sait que $\lim\limits_{+\infty} \text{e}^{-x} = 0$, donc $\lim\limits_{+\infty} \text{e}^{-x} + 1 = 1$ et par quotient de limites $\lim\limits_{+\infty} f_0(x) = 1$.

2. La fonction f_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :

$f_0'(x) = \dfrac{\text{e}^x\left(1+\text{e}^x\right) - \text{e}^x \times \text{e}^x}{\left(1+\text{e}^x\right)^2} = \dfrac{\text{e}^x}{\left(1+\text{e}^x\right)^2}$.

Il est clair que quel que soit x, $f_0'(x) > 0$: la fonction f_0 est donc strictement croissante de 0 à 1.

3. Prenons comme nouvelle origine le point $\text{I}\left(0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$.

On a $\left\{\begin{array}{l c l} X & = & x \\ Y & = & y - \frac{1}{2}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} x & = & X \\ y & = & Y + \frac{1}{2}\end{array}\right.$

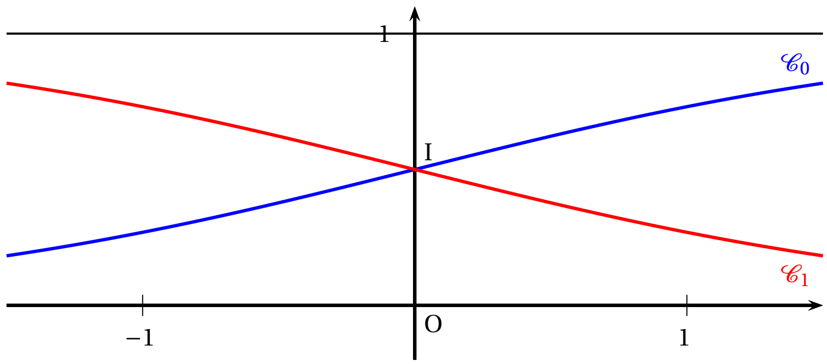
L'équation de la fonction f_0 dans le repère de centre I est donc $Y + \frac{1}{2} = f_0(X)$ soit $Y = \dfrac{\text{e}^X}{1+\text{e}^X} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2\text{e}^X - 1 - \text{e}^X}{1+\text{e}^X} = \dfrac{\text{e}^X - 1}{1+\text{e}^X}$.

Or $Y(-X) = \dfrac{\text{e}^{-X} - 1}{1+\text{e}^{-X}} = \dfrac{1-\text{e}^X}{\text{e}^X+1} = -\dfrac{\text{e}^X - 1}{\text{e}^X+1} = -Y(X)$, ce qui montre que le point est centre de symétrie de $\mathscr{C}_0$ courbe représentative de f_0.

4. Une équation de la tangente est :
$y - f_0(0) = f_0'(0)(x-0)$; avec $f_0(0) = \frac{1}{2}$ et $f_0'(0) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$, l'équation de la tangente est donc :
$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}x \iff y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}x$.

5. $f_1(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{(1-1)x}}{1+\mathrm{e}^x} = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$, donc :
$f_1(-x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = f_0(x)$.

6. D'après la question précédente $\mathscr{C}_1$ est la symétrique de $\mathscr{C}_0$ autour de l'axe des ordonnées.



Partie B Calcul d'une aire

1. Quel que soit le réel x, $f_0(x) + f_1(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} + \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x} = \dfrac{1+\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = 1$.

2. $f_0(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$; en posant $u(x) = 1+\mathrm{e}^x$, on a $u'(x) = \mathrm{e}^x$ et par conséquent $f_0(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ et l'on reconnaît la dérivée de $\ln|u(x)| = \ln(1+\mathrm{e}^x)$ puisque $u(x) \geqslant 1 > 0$.
Une primitive de f_0 est donc la fonction F_0 définie pour tout réel par $F_0(x) = \ln(1+\mathrm{e}^x)$.
On en déduit que :
$\displaystyle\int_0^a f_0(x)\,\mathrm{d}x = [F_0]_0^a = F_0(a) - F_0(0) = \ln\left(1+\mathrm{e}^a\right) - \ln\left(1+\mathrm{e}^0\right) = \ln\left(1+\mathrm{e}^a\right) - \ln 2 = \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}^a}{2}\right)$.
D'après la question 1., $f_1(x) = 1 - f_0(x)$, donc :
$\displaystyle\int_0^a f_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a [1 - f_0(x)]\,\mathrm{d}x = \int_0^a 1\,\mathrm{d}x - \int_0^a f_0(x)\,\mathrm{d}x = a - \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}^a}{2}\right)$.

3. L'aire cherchée $\mathscr{A}(a)$ est la différence entre l'aire du rectangle de côtés a et 1 et de l'intégrale précédente soit :
$\mathscr{A}(a) = a - \left[a - \ln\left(\dfrac{1+\mathrm{e}^a}{2}\right)\right] = \ln\left(\dfrac{1+\mathrm{e}^a}{2}\right)$.

4. Comme $\lim\limits_{a\to+\infty} \mathrm{e}^a = +\infty$, il en résulte que $\lim\limits_{a\to+\infty} \mathscr{A}(a) = +\infty$.

Partie C Étude d'une suite

1. On a calculé $u_0 = \displaystyle\int_0^1 f_0(x)\,\mathrm{d}x = \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}^1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}}{2}\right)$.
On a aussi $u_1 = \displaystyle\int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x = 1 - \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}^1}{2}\right) = 1 - \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}}{2}\right)$.

2. Quel que soit le naturel n, $u_{n+1} + u_n = \displaystyle\int_0^1 f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x =$

$\displaystyle\int_0^1 \left[f_{n+1}(x) + f_n(x)\right]\,\mathrm{d}x.$

Or $f_{n+1}(x) + f_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{(1-(n+1))x}}{1+\mathrm{e}^x} + \dfrac{\mathrm{e}^{(1-n)x}}{1+\mathrm{e}^x} = \dfrac{\mathrm{e}^{-nx} + \mathrm{e}^{(1-n)x}}{1+\mathrm{e}^x} = \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}\left(1+\mathrm{e}^x\right)}{1+\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^{-nx}$.

D'où $\displaystyle\int_0^1 \left[f_{n+1}(x) + f_n(x)\right]\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\right]_0^1 = -\frac{1}{n}\left(\mathrm{e}^{-n}-1\right)$ soit en multipliant chaque terme par e^n :

$\displaystyle\int_0^1 \left[f_{n+1}(x) + f_n(x)\right]\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^n - 1}{n\mathrm{e}^n}.$

3. Avec l'écriture précédente $u_{n+1} + u_n = -\dfrac{1}{n}\left(\mathrm{e}^{-n}-1\right)$; $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} - 1 = -1$ et enfin $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} + u_n = 0$.

4. La fonction exponentielle est croissante sur $[0\,;\,1]$, donc :

$0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow \mathrm{e}^0 \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}^1$ ou $1 \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}$.

Donc $1 \leqslant \mathrm{e}^x \Rightarrow \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^x} \times 1 \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^x} \times \mathrm{e}^x$, soit

$\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^x} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{(1-n)x}}{1+\mathrm{e}^x}.$

5. Considérons $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_0^1 f_{n+1}(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[f_{n+1}(x) - f_n(x)\right]\mathrm{d}x =$ $\displaystyle\int_0^1 \left[\frac{\mathrm{e}^{(1-n-1)x}}{1+\mathrm{e}^x} - \frac{\mathrm{e}^{(1-n)x}}{1+\mathrm{e}^x}\right]\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[\frac{\mathrm{e}^{(-n)x}}{1+\mathrm{e}^x} - \frac{\mathrm{e}^{(1-n)x}}{1+\mathrm{e}^x}\right]\mathrm{d}x$; d'après la question précédente la fonction à intégrer est négative donc l'intégrale l'est aussi : $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$: la suite est donc décroissante.

Tous les termes de la suite sont positifs car intégrales de fonctions positives.

On a donc $0 \leqslant u_n < u_n + u_{n+1}$ et on a vu que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} + u_n = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.