

Corrigé du baccalauréat S Antilles-Guyane
22 juin 2015

EXERCICE 1

6 POINTS

Commun à tous les candidats

Partie A

1. Pour toutes les courbes, on a $g_a(1) = a$. Donc on a de bas en haut les courbes $\Gamma_{0,05}$, $\Gamma_{0,1}$, $\Gamma_{0,19}$ et $\Gamma_{0,4}$.
2. Les courbes $\Gamma_{0,05}$ et $\Gamma_{0,1}$ semblent sécantes à \mathcal{C} en deux points;
 La courbe $\Gamma_{0,19}$ semble être tangente à \mathcal{C} ;
 La courbe $\Gamma_{0,4}$ et \mathcal{C} semblent ne pas être sécantes.
 Il semble donc que :
 - si $0 < a < 0,19$, Γ_a et \mathcal{C} ont deux points communs;
 - si $a = 0,19$, $\Gamma_{0,19}$ et \mathcal{C} ont un point commun;
 - si $a > 0,19$, Γ_a et \mathcal{C} n'ont pas de point commun.

Partie B

1. Si $m(x; y) \in \mathcal{C} \cap \Gamma_a$, alors $\ln x = ax^2 \iff \ln x - ax^2 = 0 \iff h_a(x) = 0$.
 Le nombre de points communs à \mathcal{C} et Γ_a est donc égal au nombre de solutions de l'équation $h_a(x) = 0$.
2. a.

x	0	$\frac{1}{\sqrt{2a}}$	$+\infty$
$h'_a(x)$		+	-
$h_a(x)$	$-\infty$	$\frac{-1 - \ln(2a)}{2}$	

On a en fait : $h'_a(x) = \frac{1}{x} - 2ax = \frac{1 - 2ax^2}{x}$.

Comme $x > 0$ et $a > 0$, le signe de $h'_a(x)$ est celui de $1 - 2ax^2$.

Or $1 - 2ax^2 = 0 \iff 1 = 2ax^2 \iff \frac{1}{2a} = x^2 \iff x = \frac{1}{\sqrt{2a}}$.

D'où le tableau de variation de h_a .

b. On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Comme $h_a(x) = x \left(\frac{\ln x}{x} - 2ax \right)$, on a donc :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} - 2ax = -\infty$ et par produit de limites :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln x}{x} - 2ax \right) = -\infty$.

3. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $a = 0,1$.

a. $h_{0,1}(x) = 0 \iff \ln x - 0,1x^2 = 0.$

Soit i la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $i(x) = \ln x - 0,1x^2$; cette fonction est dérivable sur $]0; +\infty[$ et sur cet intervalle :

$$i'(x) = \frac{1}{x} - 0,2x.$$

$$\text{or } i'(x) = 0 \iff \frac{1}{x} - 0,2x = 0 \iff 1 = 0,2x^2 \iff 5 = x^2 \iff x = \sqrt{5}.$$

$$\text{On a de même } i'(x) > 0 \iff \frac{1}{x} - 0,2x > 0 \iff 1 > 0,2x^2 \iff 5 > x^2 \iff x < \sqrt{5}.$$

Sur l'intervalle $]0; \sqrt{5}[$, la fonction i est continue et strictement croissante de $-\infty$ à

$\ln \sqrt{5} - 0,1 \times (\sqrt{5})^2 = \frac{1}{2} \ln 5 - 0,5 \approx 0,3 > 0$: la fonction i s'annule donc une seule fois sur cet intervalle.

On admet que cette équation a aussi une seule solution dans l'intervalle $]\sqrt{5}; +\infty[$.

b. D'après la question précédente la courbe Γ_0 , et \mathcal{C} ont deux points communs : l'un sur $]0; \sqrt{5}[$ et l'autre sur $]\sqrt{5}; +\infty[$.

4. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $a = \frac{1}{2e}$.

a. Le tableau de variations montre que le maximum de $h_{\frac{1}{2e}}$ est égal à $\frac{-1 - \ln \frac{1}{e}}{2} = \frac{-1 + \ln e}{2} = 0.$

b. Le maximum étant nul, on en déduit que $h_{\frac{1}{2e}}(x) \leq 0 \iff \ln x \leq \frac{1}{2e}x^2$; autrement dit \mathcal{C} est sous

$\Gamma_{\frac{1}{2e}}$, sauf pour $x = \frac{1}{\sqrt{2\frac{1}{2e}}} = \sqrt{e}$ où elles ont un seul point commun.

5. On a vu que \mathcal{C} et Γ_a n'ont aucun point d'intersection lorsque l'équation $h_a(x) = 0$ n'a pas de solution, c'est-à-dire lorsque le maximum de la fonction h_a est inférieur à zéro, soit :

$$\frac{-1 - \ln(2a)}{2} < 0 \iff -1 - \ln(2a) < 0 \iff \ln 2a > -1 \iff e^{\ln 2a} > e^{-1} \iff 2a > e^{-1} \iff$$

$$a > \frac{1}{2e} \approx 0,18394 \approx 0,19.$$

EXERCICE 2

5 POINTS

Commun à tous les candidats

La partie C peut être traitée indépendamment des parties A et B

Partie A

1. D'après l'indication :

$$\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt = \left[-\left(t + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t} \right]_0^x = -\left(x + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x} - \left[-\left(0 + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda \times 0} \right] =$$

$$\frac{1}{\lambda} - \left(t + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t} = \frac{1}{\lambda} [1 - x\lambda e^{-\lambda x} + e^{-\lambda x}]$$

2. De $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, on en déduit avec $\lambda > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\lambda x} = 0$ et aussi $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\lambda e^{-x} = 0.$

$$\text{Conclusion : } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}.$$

Partie B

1. Sur le graphique de l'annexe 2 (à rendre avec la copie) :

a. Voir la surface hachurée sur l'annexe 2 à la fin.

- b. On lit comme ordonnée à l'origine $\lambda = 0,5$.
2. On suppose que $E(X) = 2$.
- a. $E(X) = 2$ signifie que la durée de vie d'un composant est en moyenne égale à 2 ans.
- b. On a vu que $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 2 \iff \lambda = 0,5$.
- c. On a :
- $$P(X \leq 2) = \int_0^2 \lambda e^{-0,5t} dt = [-e^{-0,5t}]_0^2 = -e^{-0,5 \times 2} - (-e^{-0,5 \times 0}) = 1 - e^{-1} = \frac{e-1}{e} \approx 0,632 \approx 0,63 \text{ au centième près. Ce résultat est la probabilité qu'un composant ait une durée de vie inférieure à l'espérance } E(X).$$
- d. Il faut trouver :
- $$P_{(X \geq 1)}(X \geq 3) = P_{(X \geq 1)}(X \geq 2) = P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (1 - e^{-1}) = e^{-1} \approx 0,368.$$

Partie C

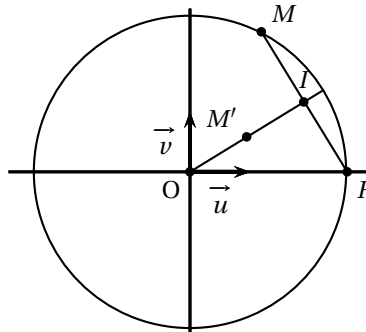
1. Les événements D_1 et D_2 sont indépendants, donc :
- $$P(D_1 \cap D_2) = P(D_1) \times P(D_2) = 0,39 \times 0,39 = 0,1521.$$
2. Ici la probabilité est égale à :
- $$P(D_1 \cup D_2) = P(D_1) + P(D_2) - P(D_1 \cap D_2) = 0,39 + 0,39 - 0,1521 = 0,6279.$$

EXERCICE 3

4 POINTS

Commun à tous les candidats

Partie A



1. Puisque $OM = OR$, on a $|z_M| = |z_R| = |z|$.
Comme R a un argument égal à 0 à 2π près on a $z_R = |z|$.
- 2.

$$z' = \frac{1}{2} \left(\frac{z + |z|}{2} \right).$$

L'affixe de $\frac{z + |z|}{2}$ est égale à la demi-somme des affixes de celles de M et de R . Le point ayant cette affixe est donc le milieu I du segment $[MR]$.
Finalement le point M' est le milieu de $[OI]$.

Partie B

1. Si z_0 est un nombre réel négatif, on a $|z_0| = -z_0$. D'où $z_1 = \frac{z_0 + |z_0|}{4} = \frac{z_0 - z_0}{4} = 0$ et tous les termes suivants de la suite sont nuls. La suite converge vers 0.

2. Si z_0 est un nombre réel positif, on a $|z_0| = z_0$. D'où

$$z_1 = \frac{z_0 + |z_0|}{4} = \frac{z_0 + z_0}{4} = \frac{z_0}{2}, \text{ puis } z_2 = \frac{z_1 + |z_1|}{4} = \frac{\frac{z_0}{2} + \frac{z_0}{2}}{4} = \frac{z_0}{4}.$$

Montrons par récurrence que $z_n = \frac{z_0}{2^n}$.

Initialisation : on vu que la relation est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $z_n = \frac{z_0}{2^n}$; alors

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{4} = \frac{\frac{z_0}{2^n} + \frac{z_0}{2^n}}{4} = \frac{\frac{z_0}{2^{n-1}}}{4} = \frac{z_0}{2^{n+1}} : \text{ la relation est vraie au rang } n+1.$$

On a montré que $z_0 = \frac{z_0}{2^0}$ et que si pour $n \in \mathbb{N}$, $z_n = \frac{z_0}{2^n}$ alors $z_{n+1} = \frac{z_0}{2^{n+1}}$

On a donc démontré par le principe de récurrence que pour tout naturel n , $z_n = \frac{z_0}{2^n}$.

La suite (z_n) est donc une suite géométrique de premier terme z_0 et de raison $\frac{1}{2}$. Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, on sait que cette suite converge vers 0.

3. a. D'après la première construction, le module de z'_M est inférieur à celui de z_M et son argument est égal à la moitié. On peut donc conjecturer que la suite $(|z_n|)$ va elle aussi converger vers 0.

b. On sait (inégalité triangulaire) que pour tous complexes z_1 et z_2 , que

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

En appliquant cette inégalité à $\frac{z_n}{4}$ et à $\frac{|z_n|}{4}$, on obtient :

$$|z_{n+1}| \leq \left| \frac{z_n}{4} \right| + \left| \frac{|z_n|}{4} \right| \text{ ou encore } |z_{n+1}| \leq \frac{2|z_n|}{4} \text{ ou } |z_{n+1}| \leq \frac{|z_n|}{2}.$$

On montre de la même façon que précédemment par récurrence que $|z_n| \leq \frac{|z_0|}{2^n}$.

La suite $\left(\frac{|z_0|}{2^n}\right)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ qui converge vers 0. Donc d'après le théorème des gendarmes la suite $(|z_n|)$ converge elle aussi vers 0.

EXERCICE 4

5 POINTS

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	k et p sont des entiers naturels u est un réel
Entrée :	Demander la valeur de p
Traitement :	Affecter à u la valeur 5 Pour k variant de 1 à p Affecter à u la valeur $0,5u + 0,5(k-1) - 1,5$ Fin de pour
Sortie :	Afficher u

valeur de k		1	2
valeur de u	5	1	-0,5

On obtient en sortie : $-0,5$.

Partie B

$$u_{n+1} = 0,5u_n + 0,5n - 1,5.$$

1. Algorithme modifié :

Variables :	k et p sont des entiers naturels u est un réel
Entrée :	Demander la valeur de p
Traitement :	Affecter à u la valeur 5 Pour k variant de 1 à p Affecter à u la valeur $0,5u + 0,5(k - 1) - 1,5$ Afficher u
Sortie :	Fin de pour

2. Puisque $u_4 > u_3$ la suite (u_n) n'est pas décroissante, du moins pas avant le rang 4.

3. *Initialisation* On vient de voir que $u_4 > u_3$: la relation est vraie pour $n = 3$.

Hérédité On suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ on ait $u_{n+1} > u_n$.

D'où $0,5u_{n+1} > 0,5u_n$; D'autre part : $n + 1 > n \Rightarrow 0,5(n + 1) > 0,5n$ d'où par somme des ces deux dernières inégalités :

$0,5u_{n+1} + 0,5(n + 1) > 0,5u_n + 0,5n$ et en ajoutant $-1,5$ à chaque membre :

$0,5u_{n+1} + 0,5(n + 1) - 1,5 > 0,5u_n + 0,5n - 1,5$ soit $u_{n+2} > u_{n+1}$: la relation est vraie au rang $n + 1$.

On a donc démontré que $u_4 > u_3$ et que pour n entier naturel supérieur ou égal à 3, $u_{n+1} > u_n$ entraîne $u_{n+2} > u_{n+1}$ ce qui montre d'après le principe de récurrence que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 4.

4. Pour tout naturel n , on a : $v_{n+1} = 0,1u_{n+1} - 0,1(n + 1) + 0,5 = 0,1u_{n+1} - 0,1n + 0,4 =$

$0,1(0,5u_n + 0,5n - 1,5) - 0,1n + 0,4 = 0,05u_n + 0,05n - 0,15 - 0,1n + 0,4 = 0,05u_n - 0,05n + 0,25 =$
 $0,5(0,1u_n - 0,1n + 0,5) = 0,5v_n$: la suite (v_n) est donc géométrique de raison 0,5.

Le premier terme est : $v_0 = 0,1 \times 5 - 0,1 \times 0 + 0,5 = 1$.

On a donc pour tout naturel n , $v_n = 1 \times 0,5^n = 0,5^n = \frac{1}{2^n}$.

5. On a $v_n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5 \iff 0,5^n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5 \iff 10 \times 0,5^n = u_n - n + 5 \iff$
 $u_n = 10 \times 0,5^n + n - 5$.

6. Comme $-1 < 0,5 < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0$ et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. La suite (u_n) ne converge pas.

EXERCICE 4

5 POINTS

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante

Partie A

1.

valeur de a	26	9	8
valeur de b	9	8	1
valeur de c	8	1	0
Affichage			1

2.

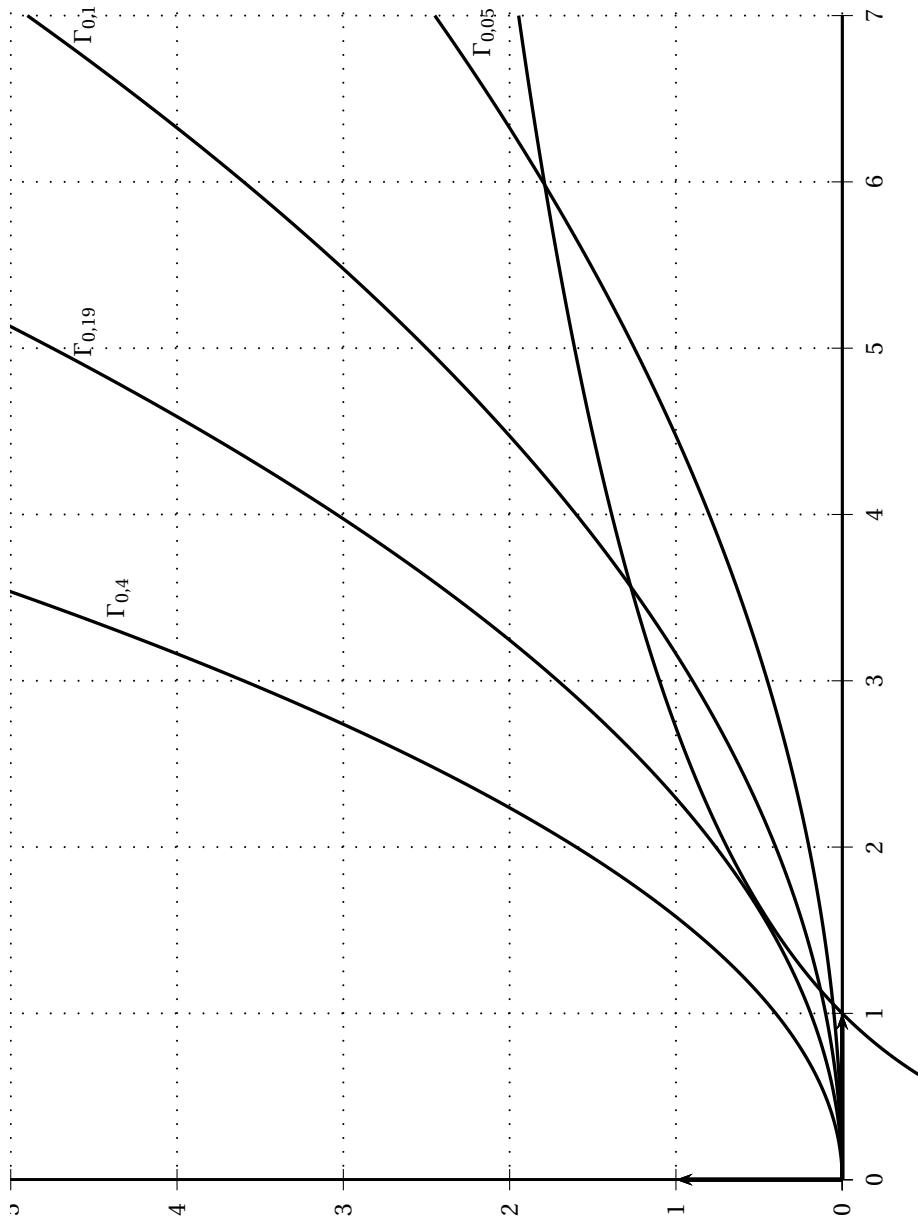
Variables :	c est un entier naturel a et b sont des entiers naturels non nuls
Entrées :	Demander a Demander b
Traitement :	Affecter à c le nombre $r(a, b)$ Tant que $c \neq 0$ Affecter à a le nombre b Affecter à b la valeur de c Affecter à c le nombre $r(a, b)$ Fin Tant que
Sortie :	Si $b = 1$ Afficher « les nombres entrés sont premiers entre eux » Sinon Afficher « les nombres entrés ne sont pas premiers entre eux » Fin de Si

Partie B

1. Dans cette question, on choisit $p = 9$ et $q = 2$.
 - a. Dans le tableau V correspond à 21, or $9 \times 21 + 2 = 189 + 2 = 191$ et $191 = 26 \times 7 + 9$; donc $x' \equiv 9 \pmod{26}$.
Dans le tableau 9 correspond à la lettre J.
 - b. 9 et 26 étant premiers entre eux, le théorème de Bezout permet d'affirmer l'existence de deux entiers relatifs u et v tels que $9u + 26v = 1$.
Le couple $(3; -1)$ est un couple simple solution de cette équation.
 - c. On a $x' \equiv 9x + 2 \pmod{26} \iff$ il existe $k \in \mathbb{Z}$, $x' = 26k + 9x + 2 \iff$
 $3x' = 26k' + 27x + 6 \iff 3x' = 26k' + 26x + x + 6 \iff 3x' = 26r'' + x + 6 \iff x = 26(-r'') + 3x' - 6 \iff$
 $x = 26(-r'') + 3x' + 20$, soit $x \equiv 3x' + 20 \pmod{26}$
 - d. R correspond à $x' = 17$, donc $3x' + 20 = 51 + 20 = 71$ et
 $71 = 26 \times 2 + 19$, soit $71 \equiv 19 \pmod{26}$.
On a donc $x = 19$ qui correspond à la lettre T.
2. J correspond à $x = 9$ et D correspond à $x' = 3$. de plus $q = 2$; on a donc :
 $3 = 9p + 2 \pmod{26} \iff 9p \equiv 1 \pmod{26}$ ou encore $27p \equiv 3 \pmod{26}$, mais on sait que $27 \equiv 1 \pmod{26}$; il en résulte que $p \equiv 3 \pmod{26}$ et comme p est compris entre 0 et 25, on a donc $p = 3$.
3. B correspond à $x = 1$, d'où $x' = 13x + 2 \equiv 15 \pmod{26}$ et 15 correspond à la lettre P.
D correspond à $x = 3$, d'où $x' = 13x + 2 \equiv 41 \pmod{26}$ et $41 \equiv 15 \pmod{26}$ et 15 correspond à la lettre P.
Conclusion : deux lettres différentes sont codées par la même lettre. Ce codage n'est pas bon puisque le décryptage donnera plusieurs solutions.

À RENDRE AVEC LA COPIE

ANNEXE 1 de l'exercice 1



À RENDRE AVEC LA COPIE

ANNEXE 2 de l'exercice 2

