Corrigé du baccalauréat S Antilles-Guyane
22 juin 2015

EXERCICE 1 **6 POINTS**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. Pour toutes les courbes, on a $g_a(1) = a$. Donc on a de bas en haut les courbes $\Gamma_{0,05}$, $\Gamma_{0,1}$, $\Gamma_{0,19}$ et $\Gamma_{0,4}$.
2. Les courbes $\Gamma_{0,05}$ et $\Gamma_{0,1}$ semblent sécantes à $\mathscr{C}$ en deux points ;
   La courbe $\Gamma_{0,19}$ semble être tangente à $\mathscr{C}$;
   La courbe $\Gamma_{0,4}$ et $\mathscr{C}$ semblent ne pas être sécantes.
   Il semble donc que :
   — si $0 < a < 0,19$, Γ_a et $\mathscr{C}$ ont deux points communs ;
   — si $a = 0,19$, $\Gamma_{0,19}$ et $\mathscr{C}$ ont un point commun ;
   — si $a > 0,19$, Γ_a et $\mathscr{C}$ n'ont pas de point commun.

Partie B

1. Si $m(x\,;\,y) \in \mathscr{C} \cap \Gamma_a$, alors $\ln x = ax^2 \iff \ln x - ax^2 = 0 \iff h_a(x) = 0$.
   Le nombre de points communs à $\mathscr{C}$ et Γ_a est donc égal au nombre de solutions de l'équation $h_a(x) = 0$.
2. **a.**

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2a}}$		$+\infty$
$h'_a(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$h_a(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{-1-\ln(2a)}{2}$	$\searrow$	

   On a en fait : $h'_a(x) = \dfrac{1}{x} - 2ax = \dfrac{1-2ax^2}{x}$.
   Comme $x > 0$ et $a > 0$, le signe de $h'_a(x)$ est celui de $1-2ax^2$.
   Or $1-2ax^2 = 0 \iff 1 = 2ax^2 \iff \dfrac{1}{2a} = x^2 \iff x = \dfrac{1}{\sqrt{2a}}$.
   D'où le tableau de variation de h_a.

   b. On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.
   Comme $h_a(x) = x\left(\frac{\ln x}{x} - 2ax\right)$, on a donc :
   $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} - 2ax = -\infty$ et par produit de limites :
   $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{\ln x}{x} - 2ax\right) = -\infty$.
3. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $a = 0,1$.

a. $h_{0,1}(x) = 0 \iff \ln x - 0,1x^2 = 0$.
Soit i la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par $i(x) = \ln x - 0,1x^2$; cette fonction est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ et sur cet intervalle :
$i'(x) = \dfrac{1}{x} - 0,2x$.
or $i'(x) = 0 \iff \dfrac{1}{x} - 0,2x = 0 \iff 1 = 0,2x^2 \iff 5 = x^2 \iff x = \sqrt{5}$.
On a de même $i'(x) > 0 \iff \dfrac{1}{x} - 0,2x > 0 \iff 1 > 0,2x^2 \iff 5 > x^2 \iff x < \sqrt{5}$.
Sur l'intervalle $\left]0~;~\sqrt{5}\right[$, la fonction i est continue et strictement croissante de $-\infty$ à $\ln\sqrt{5} - 0,1 \times \left(\sqrt{5}\right)^2 = \dfrac{1}{2}\ln 5 - 0,5 \approx 0,3 > 0$: la fonction i s'annule donc une seule fois sur cet intervalle.
On admet que cette équation a aussi une seule solution dans l'intervalle $\left]\sqrt{5}~;~+\infty\right[$.

b. D'après la question précédente la courbe $\Gamma_{0,}$ et $\mathscr{C}$ ont deux points communs : l'un sur $]0~;~\sqrt{5}[$ et l'autre sur $\left]\sqrt{5}~;~+\infty\right[$.

4. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $a = \frac{1}{2\text{e}}$.

a. Le tableau de variations montre que le maximum de $h_{\frac{1}{2\text{e}}}$ est égal à $\dfrac{-1 - \ln\frac{1}{\text{e}}}{2} = \dfrac{-1 + \ln \text{e}}{2} = 0$.

b. Le maximum étant nul, on en déduit que $h_{\frac{1}{2\text{e}}}(x) \leqslant 0 \iff \ln x \leqslant \frac{1}{2\text{e}}x^2$; autrement dit $\mathscr{C}$ est sous $\Gamma_{\frac{1}{2\text{e}}}$, sauf pour $x = \dfrac{1}{\sqrt{2\frac{1}{2\text{e}}}} = \sqrt{\text{e}}$ où elles ont un seul point commun.

5. On a vu que $\mathscr{C}$ et Γ_a n'ont aucun point d'intersection lorsque l'équation $h_a(x) = 0$ n'a pas de solution, c'est-à-dire lorsque le maximum de la fonction h_a est inférieur à zéro, soit :
$\dfrac{-1 - \ln(2a)}{2} < 0 \iff -1 - \ln(2a) < 0 \iff \ln 2a > -1 \iff \text{e}^{\ln 2a} > \text{e}^{-1} \iff 2a > \text{e}^{-1} \iff$
$a > \dfrac{1}{2\text{e}} \approx 0{,}183\,94 \approx 0,19$.

EXERCICE 2 **5 POINTS**
Commun à tous les candidats

La partie C peut être traitée indépendamment des parties A et B

Partie A

1. D'après l'indication :
$\displaystyle\int_0^x \lambda t\text{e}^{-\lambda t}\,\text{d}t = \left[-\left(t + \frac{1}{\lambda}\right)\text{e}^{-\lambda t}\right]_0^x = -\left(x + \frac{1}{\lambda}\right)\text{e}^{-\lambda x} - \left[-\left(0 + \frac{1}{\lambda}\right)\text{e}^{-\lambda \times 0}\right] =$
$\dfrac{1}{\lambda} - \left(t + \dfrac{1}{\lambda}\right)\text{e}^{-\lambda t} = \dfrac{1}{\lambda}\left[1 - x\lambda\text{e}^{-\lambda x} + \text{e}^{-\lambda x}\right]$

2. De $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \text{e}^{-x} = 0$, on en déduit avec $\lambda > 0$, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \text{e}^{-\lambda x} = 0$ et aussi $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x\lambda\text{e}^{-\lambda x} = 0$.
Conclusion : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \text{e}^{-x} = \int_0^x \lambda t\text{e}^{-\lambda t}\,\text{d}t = \frac{1}{\lambda}$.

Partie B

1. Sur le graphique de l'annexe 2 (à rendre avec la copie) :

a. Voir la surface hachurée sur l'annexe 2 à la fin.

b. On lit comme ordonnée à l'origine $\lambda = 0,5$.

2. On suppose que $E(X) = 2$.

a. $E(X) = 2$ signifie que la durée de vie d'un composant est en moyenne égale à 2 ans.

b. On a vu que $E(X) = \dfrac{1}{\lambda} = 2 \iff \lambda = 0,5$.

c. On a :
$P(X \leqslant 2) = \displaystyle\int_0^2 \lambda \mathrm{e}^{-0,5t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-0,5t}\right]_0^2 = -\mathrm{e}^{-0,5\times 2} - \left(\mathrm{e}^{-0,5\times 0}\right) = 1 - \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}} \approx 0,632 \approx 0,63$ au centième près. Ce résultat est la probabilité qu'un composant ait une durée de vie inférieure à l'espérance $E(X)$.

d. Il faut trouver :
$P_{(X \geqslant 1)}(X \geqslant 3) = P_{(X \geqslant 1)}(X \geqslant 2) = P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 2) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) = \mathrm{e}^{-1} \approx 0,368$.

Partie C

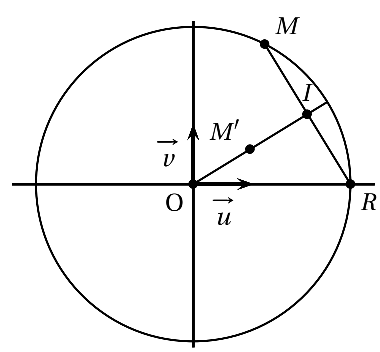
1. Les évènements D_1 et D_2 sont indépendants, donc :
$P\left(D_1 \cap D_2\right) = P\left(D_1\right) \times P\left(D_2\right) = 0,39 \times 0,39 = 0,1521$.

2. Ici la probabilité est égale à :
$P\left(D_1 \cup D_2\right) = P\left(D_1\right) + P\left(D_2\right) - P\left(D_1 \cap D_2\right) = 0,39 + 0,39 - 0,1521 = 0,6279$.

EXERCICE 3 **4 POINTS**

Commun à tous les candidats

Partie A



1. Puisque OM = OR, on a $|z_M| = |z_R| = |z|$.
Comme R a un argument égal à 0 à 2π près on a $z_R = |z|$.

2.

$$z' = \frac{1}{2}\left(\frac{z + |z|}{2}\right).$$

L'affixe de $\dfrac{z+|z|}{2}$ est égale à la demi-somme des affixes de celles de M et de R. Le point ayant cette affixe est donc le milieu I du segment $[MR]$.
Finalement le point M' est le milieu de $[\mathrm{O}I]$.

Partie B

1. Si z_0 est un nombre réel négatif, on a $|z_0| = -z_0$. D'où $z_1 = \dfrac{z_0 + |z_0|}{4} = \dfrac{z_0 - z_0}{4} = 0$ et tous les termes suivants de la suite sont nuls. La suite converge vers 0.

2. Si z_0 est un nombre réel positif, on a $|z_0| = z_0$. D'où
$z_1 = \dfrac{z_0 + |z_0|}{4} = \dfrac{z_0 + z_0}{4} = \dfrac{z_0}{2}$, puis $z_2 = \dfrac{z_1 + |z_1|}{4} = \dfrac{\frac{z_0}{2} + \frac{z_0}{2}}{4} = \dfrac{z_0}{4}$.
Montrons par récurrence que $z_n = \dfrac{z_0}{2^n}$.
Initialisation : on vu que la relation est vraie pour $n = 0$.
Hérédité : supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $\quad z_n = \dfrac{z_0}{2^n}$; alors
$z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{4} = \dfrac{\frac{z_0}{2^n} + \frac{z_0}{2^n}}{4} = \dfrac{\frac{z_0}{2^{n-1}}}{2^2} = \frac{z_0}{2^{n+1}}$: la relation est vraie au rang $n+1$.
On a montré que $z_0 = \dfrac{z_0}{2^0}$ et que si pour $n \in \mathbb{N}$, $\quad z_n = \dfrac{z_0}{2^n}$ alors $z_{n+1} = \frac{z_0}{2^{n+1}}$
On a donc démontré par le principe de récurrence que pour tout naturel n, $\quad u_n = \dfrac{z_0}{2^n}$.
La suite (z_n) est donc une suite géométrique de premier terme z_0 et de raison $\frac{1}{2}$. Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, on sait que cette suite converge vers 0.

3. a. D'après la première construction, le module de z'_M est inférieur à celui de z_M et son argument est égal à la moitié. On peut donc conjecturer que la suite $(|z_n|)$ va elle aussi converger vers 0.

b. On sait (inégalité triangulaire) que pour tous complexes z_1 et z_2, que
$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.
En appliquant cette inégalité à $\frac{z_n}{4}$ et à $\frac{|z_n|}{4}$, on obtient :
$|z_{n+1}| \leqslant \left|\frac{z_n}{4}\right| + \left|\frac{|z_n|}{4}\right|$ ou encore $|z_{n+1}| \leqslant \dfrac{2|z_n|}{4}$ ou $|z_{n+1}| \leqslant \dfrac{|z_n|}{2}$.
On montre de la même façon que précédemment par récurrence que $|z_n| \leqslant \dfrac{|z_0|}{2^n}$.
La suite $\left(\dfrac{|z_0|}{2^n}\right)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ qui converge vers 0. Donc d'après le théorème des gendarmes la suite $(|z_n|)$ converge elle aussi vers 0.

EXERCICE 4 — 5 POINTS

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	k et p sont des entiers naturels
	u est un réel
Entrée :	Demander la valeur de p
Traitement :	Affecter à u la valeur 5
	Pour k variant de 1 à p
	Affecter à u la valeur $0,5u + 0,5(k-1) - 1,5$
	Fin de pour
Sortie :	Afficher u

valeur de k		1	2
valeur de u	5	1	$-0,5$

On obtient en sortie : $-0,5$.

Partie B

$$u_{n+1} = 0,5u_n + 0,5n - 1,5.$$

1. Algorithme modifié :

Variables :	k et p sont des entiers naturels
	u est un réel
Entrée :	Demander la valeur de p
Traitement :	Affecter à u la valeur 5
	Pour k variant de 1 à p
	Affecter à u la valeur $0,5u + 0,5(k-1) - 1,5$
	Afficher u
Sortie :	Fin de pour

2. Puisque $u_4 > u_3$ la suite (u_n) n'est pas décroissante, du moins pas avant le rang 4.

3. *Initialisation* On vient de voir que $u_4 > u_3$: la relation est vraie pour $n = 3$.

Hérédité On suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$ on ait $u_{n+1} > u_n$.

D'où $0,5u_{n+1} > 0,5u_n$; D'autre part : $n+1 > n \Rightarrow 0,5(n+1) > 0,5n$ d'où par somme des ces deux dernières inégalités :

$0,5u_{n+1} + 0,5(n+1) > 0,5u_n + 0,5n$ et en ajoutant $-1,5$ à chaque membre :

$0,5u_{n+1} + 0,5(n+1) - 1,5 > 0,5u_n + 0,5n - 1,5$ soit $u_{n+2} > u_{n+1}$: la relation est vraie au rang $n+1$.

On a donc démontré que $u_4 > u_3$ et que pour n entier naturel supérieur ou égal à 3, $u_{n+1} > u_n$ entraîne $u_{n+2} > u_{n+1}$ ce qui montre d'après le principe de récurrence que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 4.

4. Pour tout naturel n, on a : $v_{n+1} = 0,1u_{n+1} - 0,1(n+1) + 0,5 = 0,1u_{n+1} - 0,1n + 0,4 =$ $0,1(0,5u_n + 0,5n - 1,5) - 0,1n + 0,4 = 0,05u_n + 0,05n - 0,15 - 0,1n + 0,4 = 0,05u_n - 0,05n + 0,25 =$ $0,5(0,1u_n - 0,1n + 0,5) = 0,5v_n$: la suite (v_n) est donc géométrique de raison 0,5.

Le premier terme est : $v_0 = 0,1 \times 5 - 0,1 \times 0 + 0,5 = 1$.

On a donc pour tout naturel n, $v_n = 1 \times 0,5^n = 0,5^n = \dfrac{1}{2^n}$.

5. On a $v_n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5 \iff 0,5^n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5 \iff 10 \times 0,5^n = u_n - n + 5 \iff$ $u_n = 10 \times 0,5^n + n - 5$.

6. Comme $-1 < 0,5 < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^n = 0$ et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$, on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. La suite (u_n) ne converge pas.

EXERCICE 4 — 5 POINTS

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B peuvent être traitées de faÃ§on indépendante

Partie A

1.

valeur de a	26	9	8
valeur de b	9	8	1
valeur de c	8	1	0
Affichage			1

2.

Variables :	c est un entier naturel a et b sont des entiers naturels non nuls
Entrées :	Demander a Demander b
Traitement :	Affecter à c le nombre $r(a,\ b)$ Tant que $c \neq 0$ Affecter à a le nombre b Affecter à b la valeur de c Affecter à c le nombre $r(a,\ b)$ Fin Tant que
Sortie :	Si $b = 1$ Afficher « les nombres entrés sont premiers entre eux » Sinon Afficher « les nombres entrés ne sont pas premiers entre eux » Fin de Si

Partie B

1. Dans cette question, on choisit $p = 9$ et $q = 2$.

a. Dans le tableau V correspond à 21, or $9\times 21+2 = 189+2 = 191$ et $191 = 26\times 7+9$; donc $x' \equiv 9 \quad [26]$.
Dans le tableau 9 correspond à la lettre J.

b. 9 et 26 étant premiers entre eux, le théorème de Bezout permet d'affirmer l'existence de deux entiers relatifs u et v tels que $9u + 26v = 1$.
Le couple $(3\ ;\ -1)$ est un couple simple solution de cette équation.

c. On a $x' \equiv 9x+2 \quad [26] \iff$ il existe $k \in \mathbb{Z},\ x' = 26k+9x+2 \iff$
$3x' = 26k'+27x+6 \iff 3x' = 26k'+26x+x+6 \iff 3x' = 26r''+x+6 \iff x = 26(-r'')+3x'-6 \iff$
$x = 26(-r'')+3x'+20$, soit $x \equiv 3x'+20 \quad [26]$

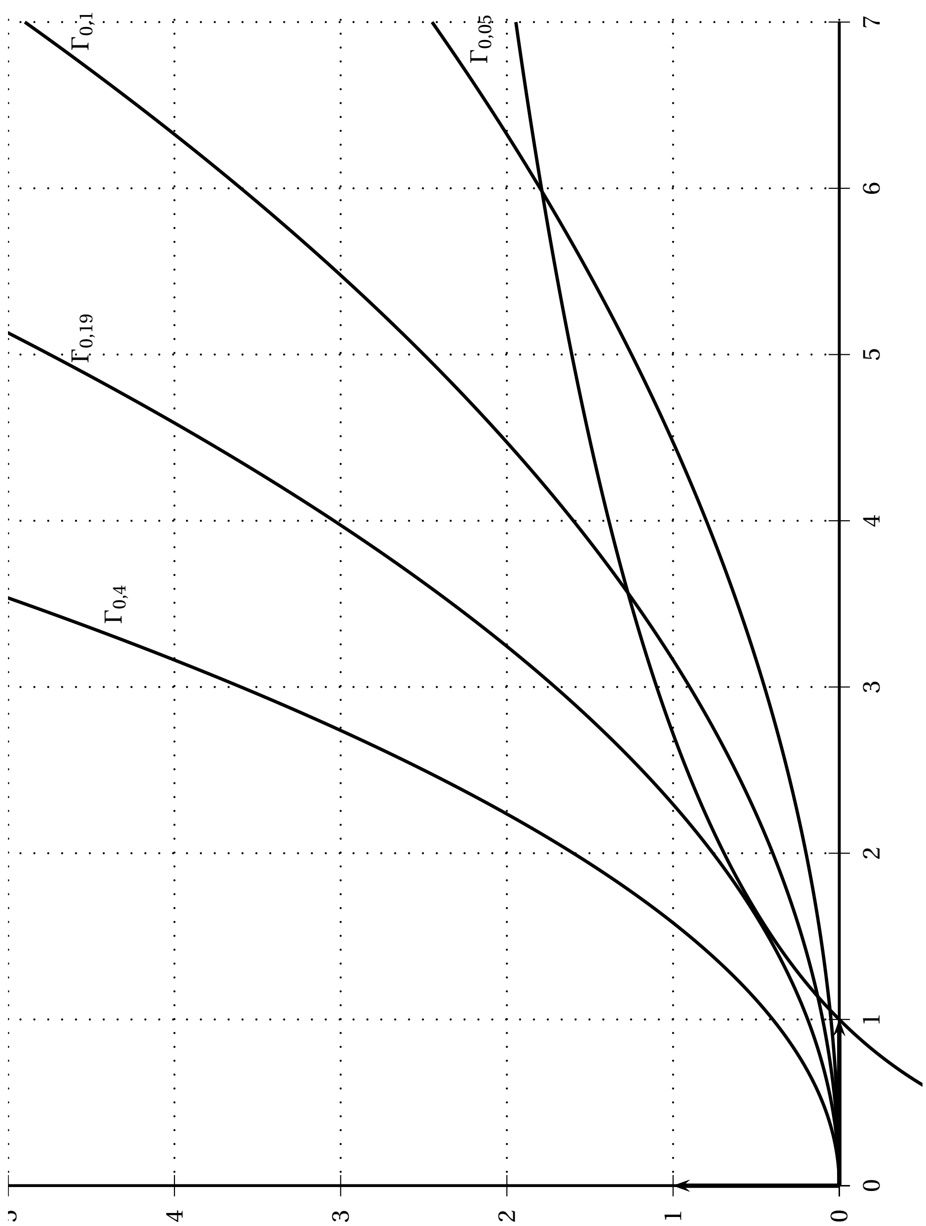
d. R correspond à $x' = 17$, donc $3x'+20 = 51+20 = 71$ et
$71 = 26\times 2+19$, soit $71 \equiv 19 \quad [26]$.
On a donc $x = 19$ qui correspond à la lettre T.

2. J correspond à $x = 9$ et D correspond à $x' = 3$. de plus $q = 2$; on a donc :
$3 = 9p+2 \quad [26] \iff 9p \equiv 1 \quad [26]$ ou encore $27p \equiv 3 \quad [26]$, mais on sait que $27 \equiv 1 \quad [26]$; il en résulte que $p \equiv 3 \quad [26]$ et comme p est compris entre 0 et 25, on a donc $p = 3$.

3. B correspond à $x = 1$, d'où $x' = 13x+2 \equiv 15 \quad [26]$ et 15 correspond à la lettre P.
D correspond à $x = 3$, d'où $x' = 13x+2 \equiv 41 \quad [26]$ et $41 \equiv 15 \quad [26]$ et 15 correspond à la lettre P.
Conclusion : deux lettres différentes sont codées par la même lettre. Ce codage n'est pas bon puisque le décryptage donnera plusieurs solutions.

Ã€ RENDRE AVEC LA COPIE

ANNEXE 1 de l'exercice 1



À RENDRE AVEC LA COPIE

ANNEXE 2 de l'exercice 2