Corrigé du baccalauréat S Antilles-Guyane 20 juin 2016

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Les valeurs approchées des résultats seront données à 10^{-4} *près.*

Les parties A *et* B *sont indépendantes*

Partie A

Un fabricant d'ampoules possède deux machines, notées A et B. La machine A fournit 65 % de la production, et la machine B fournit le reste. Certaines ampoules présentent un défaut de fabrication :

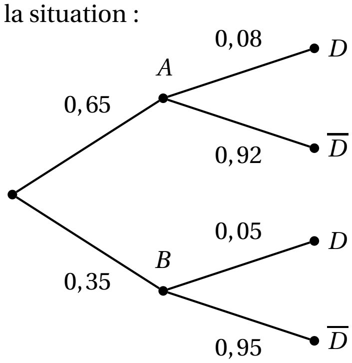
— à la sortie de la machine A, 8 % des ampoules présentent un défaut ;
— à la sortie de la machine B, 5 % des ampoules présentent un défaut.

On définit les évènements suivants :

— A : « l'ampoule provient de la machine A » ;
— B : « l'ampoule provient de la machine B » ;
— D : « l'ampoule présente un défaut ».

1. On prélève un ampoule au hasard parmi la production totale d'une journée.

   a. Arbre pondéré représentant la situation :



   b. On utilise la formule des probabilités totales :
   $p\left(\overline{D}\right) = p_A\left(\overline{D}\right) \times p(A) + p_B\left(\overline{D}\right) \times p(B) = 0,92 \times 0,65 + 0,95 \times 0,35 =$
   $0,598 + 0,3325 = \boxed{0,9305}$.

   c. $p_{\overline{D}}(A) = \dfrac{p\left(A \cap \overline{D}\right)}{p\left(\overline{D}\right)} = \dfrac{0,598}{0,9305} \approx \boxed{0,6427}$.

2. On prélève 10 ampoules au hasard parmi la production d'une journée à la sortie de la machine A. La taille du stock permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à tirages avec remise.
   Notons N le nombre d'ampoules sans défaut. On a répétition d'épreuves identiques indépendantes à deux issues ; N suit la loi binomiale $\mathscr{B}(10\ ;\ 0,92)$.
   On sait que $p(X = k) = \binom{10}{k} 0,92^k \times (1 - 0,92)^{10-k}$.
   $p(N \geqslant 9) = 1 - p(N \leqslant 8) \approx \boxed{0,8121}$ (calculé à la calculatrice)

Partie B

1. On rappelle que si T suit une loi exponentielle de paramètre λ (λ étant un réel strictement positif) alors pour tout réel positif a, $P(T \leqslant a) = \displaystyle\int_0^a \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x$.

a. $P(T \geqslant a) = 1 - P(T < a) = 1 - \int_0^a \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = 1 - \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^a = 1 - \left(-\mathrm{e}^{-\lambda a} - (-1)\right) = \boxed{\mathrm{e}^{-\lambda a}}$.

b. $P_{T \geqslant t}(T \geqslant t + a) = \dfrac{p([T \geqslant t] \cap (T \geqslant t + a))}{P(T \geqslant t)} = \dfrac{p[T \geqslant t + a]}{P(T \geqslant t)} = \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+a)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}} = \mathrm{e}^{-\lambda a} = \boxed{P(T \geqslant a)}$ (loi de durée de vie sans vieillissement).

2. Dans cette partie, la durée de vie en heures d'une ampoule sans défaut est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle d'espérance 10 000.

a. On sait que pour une loi exponentielle, l'espérance $E(T)$ est $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$.

On a donc $\dfrac{1}{\lambda} = 1000$ d'où $\boxed{\lambda = 0{,}0001}$.

b. $P(T \geqslant 5000) = \mathrm{e}^{-0{,}0001 \times 5000} = \mathrm{e}^{-0{,}5} \approx \boxed{0{,}6065}$

c. $P_{(T \geqslant 7000)}(T \geqslant 12000) = P(T \geqslant 5000) \approx 0{,}6065$ (d'après 1. b.)

Partie C

L'entreprise a cherché à améliorer la qualité de sa production et affirme qu'il n'y a pas plus de 6 % d'ampoules défectueuses dans sa production. Une association de consommateurs réalise un test sur un échantillon et obtient 71 ampoules défectueuses sur 1 000.

1. On a $p = 0,06$, $n = 1000$.

- $n \geqslant 30$
- $np = 60 \geqslant 5$
- $n(1-p) = 9400 \geqslant 5$

Les conditions sont réunies pour qu'on puisse calculer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

$I_{95} = \left[p - \dfrac{1,96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + \dfrac{1,96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \approx [0,0452\ ;\ 0,0748]$.

2. La fréquence observée d'ampoules défectueuses est $f = \dfrac{0,71}{1000} = 0,071$.

$f \in I_{95}$. Au risque d'erreur de 5 %, on il n'y a pas lieu de remettre en cause l'affirmation de l'entreprise.

EXERCICE 2 — 3 points

Commun à tous les candidats

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|z - 2| = 1$.

1. Soit A le point d'affixe 2.

$|z - 2| = 1 \iff AM = 1$ donc $\mathscr{C}$ est le cercle de centre A et de rayon 1.

2. $M(z) \in \mathscr{C} \cap \mathscr{D} \iff \begin{cases} |z-2| = 1 \\ y = ax \end{cases} \iff \begin{cases} y = ax \\ |x - 2 + \mathrm{i}ax| = 1 \end{cases}$.

$|x - 2 + \mathrm{i}ax| = 1 \iff (x-2)^2 + a^2x^2 = 1 \iff \left(1 + a^2\right)x^2 - 4x + 3 = 0$.

Le discriminant est $\Delta = 16 - 12\left(1 + a^2\right) = 4 - 12a^2 = 4\left(1 - 3a^2\right)$.

Pour qu'il y ait une intersection, il faut que cette équation ait au moins une solution réelle, donc que $\Delta \geqslant 0$.

On doit avoir $1 - 3a^2 \geqslant 0$, donc $\boxed{-\sqrt{\dfrac{1}{3}} \leqslant a \leqslant \sqrt{\dfrac{1}{3}}}$.

On peut alors distinguer trois cas :

— **Premier cas.** $a \in \left]-\infty\,; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right[\cup \left]\frac{\sqrt{3}}{3}\,;\,\infty\right[$: aucun point d'intersection.

— **Deuxième cas.** $a = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$: un seul point d'intersection (la droite et le cercle sont tangents).

— **Troisième cas.** $a \in \left]-\frac{\sqrt{3}}{3}\,;\,\frac{\sqrt{3}}{3}\right[$: deux points d'intersection.

EXERCICE 3 — 7 points

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = x\mathrm{e}^{1-x^2}$.

1. Pour tout $x \neq 0$, $f(x) = x\mathrm{e} \times \mathrm{e}^{-x^2} = \dfrac{\mathrm{e}}{x} \times \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}$.

$\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{x^2}\right) = \lim_{X\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^X}{X} + +\infty$ (croissances comparées).

Donc $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}\right) = 0$.

Comme $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\mathrm{e}}{x}\right) = 0$, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

$f(x) = \frac{\mathrm{e}}{x} \times \frac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}$.

On admettra que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à 0.

2. **a.** $f = u\mathrm{e}^v$ avec $\begin{cases} u(x) = x \\ u'(x) = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} v(x) = 1 - x^2 \\ v'(x) = -2x \end{cases}$.

$f' = u'\mathrm{e}^v + u \times v'\mathrm{e}^v$ d'où :

$f'(x) = \mathrm{e}^{1-x^2} + x \times (-2x)\mathrm{e}^{1-x^2} = \boxed{\left(1-2x^2\right)\mathrm{e}^{1-x^2}}$.

b. Comme $\mathrm{e}^{1-x^2>0}$, $f'(x)$ est du signe de $1-2x^2$.

$1 - 2x^2 = 0 \iff x^2 = \dfrac{1}{2} \iff x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $1-2x^2$ est positif (signe opposé à celui du coefficient de x^2) entre les racines.

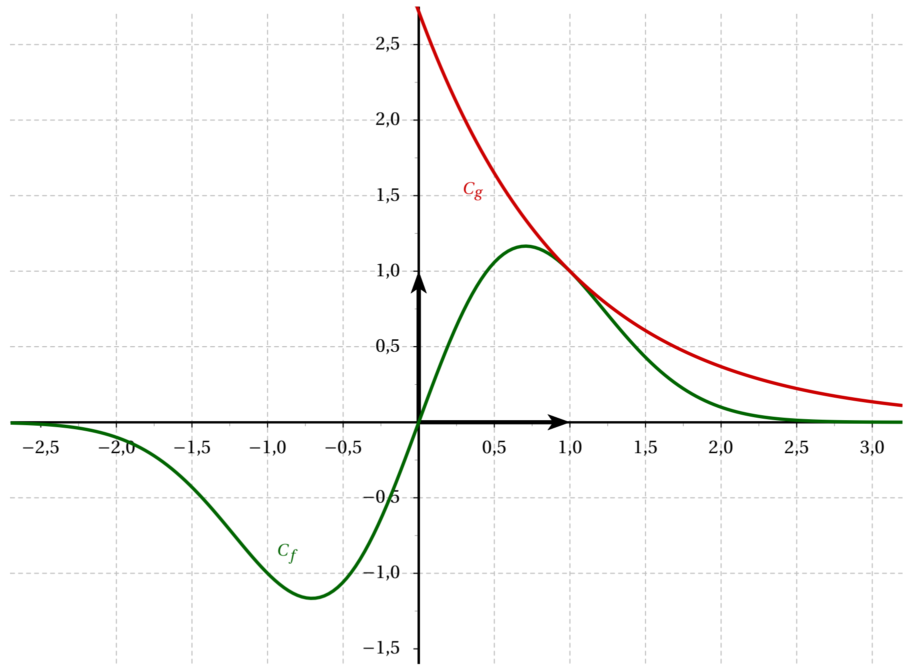
$f\left(-\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right) = -\sqrt{\dfrac{1}{2}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \mathrm{e} = -\dfrac{\sqrt{2\mathrm{e}}}{2}$ et $f\left(\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right) = \dfrac{\sqrt{2\mathrm{e}}}{2}$.

Tableau de variations :

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{\sqrt{2\mathrm{e}}}{2}$	↗	$\frac{\sqrt{2\mathrm{e}}}{2}$	↘	0

Partie B

On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = \mathrm{e}^{1-x}$.
Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ respectivement des fonctions f et g.



Le but de cette partie est d'étudier la position relative de ces deux courbes.

1. Il semble que $\mathscr{C}_f$ soit en dessous de $\mathscr{C}_g$ et que les deux courbes soient tangentes en un point.
2. Soit $x \leqslant 0$; $f(x) = x\mathrm{e}^{1-x^2} \leqslant 0$ car $x \leqslant 0$ et $\mathrm{e}^{1-x^2} > 0$ et $g(x) = \mathrm{e}^{1-x} > 0$, donc $f(x) < g(x)$.
3. Dans cette question, on se place dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   On pose, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) = \ln x - x^2 + x$.

   a. $f(x) \leqslant g(x) \iff x\mathrm{e}^{1-x^2} \leqslant \mathrm{e}^{1-x} \iff x\mathrm{e}\mathrm{e}^{-x^2} \iff \mathrm{e}\mathrm{e}^{-x} \iff x\mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \mathrm{e}^{-x} \iff \ln\left(x\mathrm{e}^{-x^2}\right) \leqslant \ln\left(\mathrm{e}^{-x}\right)$ (car la fonction ln est croissante).
   cela équivaut à $\ln x - x^2 \leqslant -x \iff \ln x - x^2 + x \leqslant 0 \iff \boxed{\Phi(x) \leqslant 0}$.
   On admet pour la suite que $f(x) = g(x)$ équivaut à $\Phi(x) = 0$.

   b. $\Phi'(x) = \dfrac{1}{x} - 2x + 1 = \dfrac{-2x^2 + x + 1}{x}$ qui est du signe de $-2x^2 + x + 1$ car $x > 0$.
   On calcule le discriminant : $\Delta = 9 > 0$: il y a deux racines : $-\dfrac{1}{2}$ et 1.
   Cette expression est négative (du signe du coefficient de x^2, donc de -2) en dehors de l'intervalle formé par les racines.
   $\Phi(1) = 0$.
   On en déduit le tableau de variations de ϕ :

x	0		1		$+\infty$
$\Phi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\Phi(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

   c. Le maximum de $\Phi(x)$ est $\Phi(1) = 0$ donc, pour tout $x > 0$, $\Phi(x) \leqslant 0$.

4. **a.** $\Phi(x) \leqslant 0 \iff f(x) \leqslant g(x)$ donc $\mathscr{C}_f$ est bien en dessous de $\mathscr{C}_g$.

b. $f(x) = g(x) \iff \Phi(x) = 0 \iff x = 1$ donc les deux courbes ont un point commun, A, de coordonnées $(1\,;\,1)$.

c. $f'(1) = -1$: $g'(x) = -\text{e}^{1-x}$ donc $g'(1) = -1$.
En A, les deux tangentes ont l même coefficient directeur, donc les deux courbes ont même tangente.

Partie C

1. On pose $u(x) = 1 - x^2$; alors $u'(x) = -2x$ donc $x = -\dfrac{1}{2}u'(x)$ d'où $f = -\dfrac{1}{2}u'(x)\text{e}^{u(x)}$.

Une primitive est $F(x) = -\dfrac{1}{2}\text{e}^{u(x)} = \boxed{-\dfrac{1}{2}\text{e}^{1-x^2}}$.

2. $\displaystyle\int_0^1 \left(\text{e}^{1-x} - x\text{e}^{1-x^2}\right)\text{d}x = \int_0^1 [g(x) - f(x)\,\text{d}x]$.
Une primitive de $g - f$ est $G - F$ avec
$(G-F)(x) = -\text{e}^{1-x} - \left(-\dfrac{1}{2}\text{e}^{1-x^2}\right) = \dfrac{1}{2}\text{e}^{1-x^2} - \text{e}^{1-x}$.
$\displaystyle\int_0^1 \left(\text{e}^{1-x} - x\text{e}^{1-x^2}\right)\text{d}x = (G-F)(1) - (G-F)(0) = \left(\frac{1}{2} - 1\right) - \left(\frac{1}{2}\text{e} - \text{e}\right) = \boxed{\frac{\text{e}-1}{2}}$.

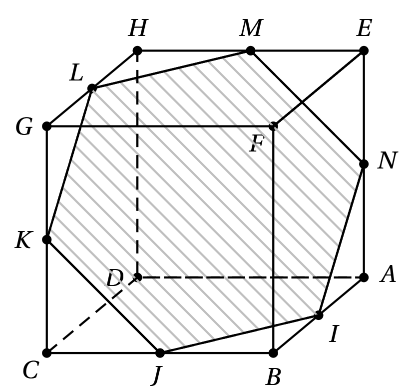
3. Ce résultat correspond à l'aire en unités d'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_g$, $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

EXERCICE 4

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête égale à 1.
L'espace est muni du repère orthonormé $\left(D\,;\,\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DH}\right)$.



Dans ce repère, on a :

$D(0\,;\,0\,;\,0)$, $C(1\,;\,0\,;\,0)$, $A(0\,;\,1\,;\,0)$, $H(0\,;\,0\,;\,1)$ et $E(0\,;\,1\,;\,1)$.

Soit I le milieu de $[AB]$.

Soit $\mathscr{P}$ le plan parallèle au plan (BGE) et passant par le point I.
On admet que la section du cube par le plan $\mathscr{P}$ représentée ci-dessus est un hexagone dont les sommets I, J, K, L, M, et N appartiennent respectivement aux arêtes $[AB]$, $[BC]$, $[CG]$, $[GH]$, $[HE]$ et $[AE]$.

1. **a.** $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ ne sont clairement pas colinéaires.

$\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{BG} = 0 - 1 + 1 = 0$; $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{BE} = -1 + 0 + 1 = 0$.
$\overrightarrow{DF}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BGE) donc c'est un vecteur normal à ce plan.

b. $\mathscr{P}$ et (BGE) sont parallèles, donc $\overrightarrow{DF}$ est aussi un vecteur normal àu plan $\mathscr{P}$.

Une équation cartésienne de ce plan est : $(x - x_I) + \left(y - y_I\right) + (z - z_I) = 0 \iff \boxed{x + y + z = \dfrac{3}{2}}$.

2. Le point N appartient à [AE]. Ses coordonnées sont donc $(0\ ;\ 1\ ;\ z_N)$.
Il appartient au plan $\mathscr{P}$ donc $0 + 1 + z_N = \dfrac{3}{2} \iff z_N = \dfrac{1}{2}$.
Ainsi N est le milieu de [AE].

3. **a.** $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique de (HB) est $\begin{cases} x = x_H - t \\ y = y_H - t \\ z - z_H + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

$\iff \boxed{\begin{cases} x = -t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}}$.

b. $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{DF} = -1 - 1 + 1 = -1 \neq 0$.
Le plan $\mathscr{P}$ et la droite (HB) sont donc sécants.
On injecte les équations de (HB) dans l'équation de $\mathscr{P}$.
$-t - t + 1 + t - \dfrac{3}{2} = 0 \iff -t - \dfrac{1}{2} = 0 \iff t = -\dfrac{1}{2}$.

Donc (HB) et le plan $\mathscr{P}$ son sécants en un point $\boxed{T\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)}$.

4. BGF est rectangle en F. Son aire est $\mathscr{A}(BGF) = \dfrac{1 \times 1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Le volume du tétraèdre $FBGE$ est alors $\mathscr{V}(FBGE) = \dfrac{\mathscr{A}(BGF) \times FE}{3} = \dfrac{\frac{1}{2} \times 1}{3} = \boxed{\dfrac{1}{6}}$.

Exercice 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

On considère l'équation suivante d'inconnues x et y entiers relatifs :

$$7x - 3y = 1. \qquad \text{(E)}$$

1. Un algorithme incomplet est donné ci-dessous. Le recopier et le compléter, en écrivant ses lignes manquantes (1) et (2) de manière à ce qu'il donne les solutions entières $(x\ ;\ y)$ de l'équation (E) vérifiant $-5 \leqslant x \leqslant 10$ et
$-5 \leqslant y \leqslant 10$.

```
Variables :   X est un nombre entier
              Y est un nombre entier
Début :       Pour X variant de −5 à 10
                  (1) Pour Y variant de -5 à 10
                      (2) Si 7X-3Y=1
                      Alors Afficher X et Y
                      Fin Si
                  Fin Pour
              Fin Pour
Fin
```

2. **a.** $7\times 1-3\times 2=7-6=1$ donc $(1~;~2)$ est une solution particulière de (E).

   b. Soit $(x~;~y)$ un couple solution quelconque de (E).
   Pn a alors : $7x-3y=7\times 1-3\times 2 \iff 7(x-1)=3(y-2)$.
   7 divise $7(x-1)$ donc 7 divise $3(x-2)$.
   7 et 3 sont premiers entre eux. D'après le théorème de Gauss, 7 divise $y-2$ donc $y-2=7k$ d'où $y=2+7k,~k\in\mathbb{Z}$.
   On remplace y par $7+2k$: on trouve $x=7(x-1)=3\times 7k$ d'où $x-1=3k$ donc $x=1+3k$.
   L'ensemble des solutions est donc $\boxed{\mathscr{S}=\{(1+3k~;~2+7k)~,~k\in\mathbb{Z}\}}$.

   c. On veut que $-5\leqslant 1+3k\leqslant 10$ et $-5\leqslant 2+7k\leqslant 10$ Soit $-6\leqslant 3k\leqslant 9$ et $-7\leqslant 7k\leqslant 8$ D'où $-2\leqslant k\leqslant 3$ et $-1\leqslant k\leqslant \dfrac{8}{7}$

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.

On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation

$$7x-3y-1=0$$

On définie la suite (A_n) de points du plan de coordonnées $(x_n~:~y_n)$ vérifiant pour tout n entier naturel :

$$\left\{\begin{array}{l c l}x_0&=&1\\y_0&=&2\end{array}\right.\quad\text{et}\quad\left\{\begin{array}{l c l}x_{n+1}&=&-\frac{13}{2}x_n+3y_n\\y_{n+1}&=&-\frac{35}{2}x_n+8y_n\end{array}\right.$$

1. On note M la matrice $\begin{pmatrix}\frac{-13}{2}&3\\\frac{-35}{2}&8\end{pmatrix}$. Pour tout entier naturel n, on pose $X_n=\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$.

   a. $MX_n=\begin{pmatrix}-\dfrac{13}{2}x_n+3y_n\\-\dfrac{35}{2}x_n+8y_n\end{pmatrix}=X_{n+1}$ donc $\boxed{X_{n+1}=MX_n}$.

   b. Pour tout n, on a : $\boxed{X_n=M^nX_0}$.

2. On considère la matrice $P=\begin{pmatrix}-2&-3\\-5&-7\end{pmatrix}$ et on admet que la matrice inverse de P, notée P^{-1}, est définie par $P^{-1}=\begin{pmatrix}7&-3\\-5&2\end{pmatrix}$.

   a. $P^{-1}MP=\begin{pmatrix}1&0\\0&\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$ donc $D=\begin{pmatrix}1&0\\0&\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$ qui est bien une matrice diagonale.

b. Pour tout n, $\boxed{D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2^n} \end{pmatrix}}$.

c. • *Initialisation* : Pour $n = 0$, $M^0 = I_2$ (matrice identité) et $PD^0P - 1 = I_2$ donc c'est vrai.

• *Hérédité* : supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque, on ait $M^n = PD^nP^{-1}$, alors
$M^{n+1} = M^n \times M = PD^nP^{-1} \times M = PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$.
La propriété est donc héréditaire.

La propriété étant vraie au rang 0 et la propriété étant héréditaire à tout rang, d'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout n.

3. On admet que, pour tout entier naturel n, $M^n = \begin{pmatrix} -14 + \frac{15}{2^n} & 6 - \frac{6}{2^n} \\ -35 + \frac{35}{2^n} & 15 - \frac{14}{2^n} \end{pmatrix}$.

On a $X_n = M^nX_0$ donc $\begin{cases} x_n = -14 + \dfrac{15}{2^n} + 12 - \dfrac{12}{2^n} \\ y_n = -35 + \dfrac{35}{2^n} + 30 - \dfrac{25}{2^n} \end{cases}$ donc : $\boxed{\begin{array}{lcl} x_n & = & -2 + \dfrac{36}{2^n} \\ y_n & = & -5 + \dfrac{7}{2^n} \end{array}}$.

4. Pour tout n, $7x_n - 3y_n - 1 = -14 + \dfrac{21}{2^n} + 15 - \dfrac{21}{2^n} - 1 = 1 - 1 = 0$ donc A_n appartient à la droite $\mathscr{D}$.