

EXERCICE 1

Commun à tous les candidats

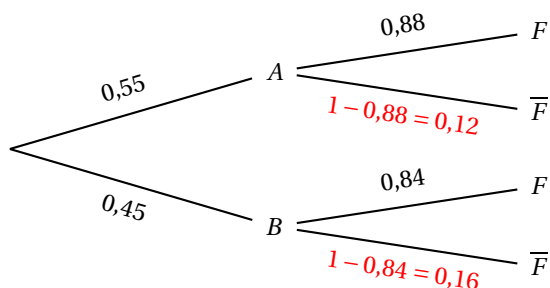
5 points

Partie A : production de fraises

On appelle :

- $A$  l'évènement « la fleur de fraisier vient de la serre A »;
- $B$  l'évènement « la fleur de fraisier vient de la serre B »;
- $F$  l'évènement « la fleur de fraisier donne une fraise »;
- $\bar{F}$  l'évènement contraire de  $F$ .

On résume les données du texte dans un arbre pondéré :



**Proposition 1 :**

La probabilité qu'une fleur de fraisier, choisie au hasard dans cette exploitation, donne un fruit est égale à 0,862.

D'après les notations, on cherche la probabilité de l'évènement  $F$ ; d'après la formule des probabilités totales :

$$P(F) = P(A \cap F) + P(B \cap F) = P(A) \times P_A(F) + P(B) \times P_B(F) = 0,55 \times 0,88 + 0,45 \times 0,84 = 0,862$$

La proposition 1 est vraie.

**Proposition 2 :**

On constate qu'une fleur, choisie au hasard dans cette exploitation, donne une fraise.

La probabilité qu'elle soit située dans la serre A, arrondie au millième, est égale à 0,439.

On cherche la probabilité que la fleur provienne de la serre A sachant qu'elle a donné une fraise :

$$P_F(A) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{0,55 \times 0,88}{0,862} \approx 0,561 \neq 0,439$$

La proposition 2 est fausse.

Partie B : conditionnement des fraises

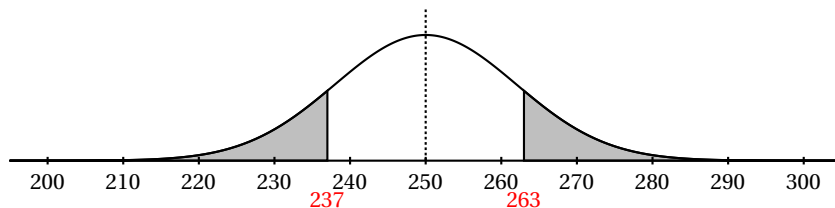
Les fraises sont conditionnées en barquettes. La masse (exprimée en gramme) d'une barquette peut être modélisée par une variable aléatoire  $X$  qui suit la loi normale d'espérance  $\mu = 250$  et d'écart-type  $\sigma$ .

1. On donne  $P(X \leq 237) = 0,14$ .

On complète le graphique donné dans l'énoncé.

On constate que  $237 = 250 - 13 = \mu - 13$  et  $263 = 250 + 13 = \mu + 13$ .

Pour des raisons de symétrie de la fonction de densité autour de la droite d'équation  $x = \mu$ , on a :



$P(X \leq 237) = P(X \geq 263)$  (parties grisées sur la figure).

$P(237 < X < 263) = 1 - (P(X \leq 237) + P(X \geq 263)) = 1 - 2 \times P(X \leq 237) = 1 - 2 \times 0,14 = 0,72$ .

La probabilité de l'évènement « la masse de la barquette est comprise entre 237 et 263 grammes » est 0,72.

2. On note  $Y$  la variable aléatoire définie par :  $Y = \frac{X - 250}{\sigma}$ .

a. D'après le cours, la variable aléatoire  $Y$  suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1 (la loi normale centrée réduite).

b. On sait que  $\sigma$  est un nombre strictement positif; donc :

$$X \leq 237 \iff X - 250 \leq 237 - 250 \iff \frac{X - 250}{\sigma} \leq -\frac{13}{\sigma} \iff Y \leq -\frac{13}{\sigma}$$

Comme  $P(X \leq 237) = 0,14$ , on en déduit que  $P\left(Y \leq -\frac{13}{\sigma}\right) = 0,14$ .

c. Pour  $Y$  suivant la loi normale centrée réduite, on cherche  $\beta$  tel que  $P(Y \leq \beta) = 0,14$ ; la calculatrice donne pour résultat environ  $-1,08$ . On a donc :  $-1,08 = -\frac{13}{\sigma}$  et donc :  $\sigma \approx 12$ .

3. Dans cette question, on admet que  $\sigma$  vaut 12. On désigne par  $n$  et  $m$  deux nombres entiers.

a. Une barquette est conforme si sa masse, exprimée en gramme, se trouve dans l'intervalle

$$[250 - n; 250 + n].$$

D'après le cours, pour toute loi normale,  $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95$ ; donc

$$P(250 - 2 \times 12 \leq X \leq 250 + 2 \times 12) \approx 0,95 \text{ ou encore } P(250 - 24 \leq X \leq 250 + 24) \approx 0,95.$$

Si  $n' > n$ , alors  $[250 - n; 250 + n] \subset [250 - n'; 250 + n']$  et donc

$$P(X \in [250 - n; 250 + n]) < P(X \in [250 - n'; 250 + n']).$$

Donc  $n = 24$  est le plus petit entier tel que  $P(250 - n \leq X \leq 250 + n)$ .

b. On considère dans cette question qu'une barquette est conforme si sa masse, exprimée en gramme, se trouve dans l'intervalle  $[230; m]$ .

Cherchons  $m$  pour que  $P(230 \leq X \leq m)$  soit égal à 0,95.

D'après le cours, on sait que  $P(230 \leq X \leq m) = P(X \leq m) - P(X < 230)$ .

En utilisant la calculatrice, on trouve que  $P(X < 230) \approx 0,0478$ .

$$P(230 \leq X \leq m) = 0,95 \iff P(X \leq m) - P(X < 230) = 0,95 \iff P(X \leq m) = P(X < 230) + 0,95 \iff P(X \leq m) \approx 0,0478 + 0,95 \iff P(X \leq m) \approx 0,9978$$

À la calculatrice, si  $X$  suit la loi normale d'espérance 250 et d'écart-type 12, le nombre  $m$  tel que  $P(X \leq m) \approx 0,9978$  vaut environ 284,2.

Donc la plus petite valeur de  $m$  pour laquelle la probabilité que la masse de la barquette se trouve dans l'intervalle  $[230; m]$  soit supérieure ou égale à 0,95 est  $m = 285$ .

## EXERCICE 2

## Commun à tous les candidats

3 points

Soit  $a$  un nombre réel compris entre 0 et 1. On note  $f_a$  la fonction définie sur  $\mathbf{R}$  par :

$$f_a(x) = a e^{ax} + a.$$

On note  $I(a)$  l'intégrale de la fonction  $f_a$  entre 0 et 1 :  $I(a) = \int_0^1 f(x) dx$ .

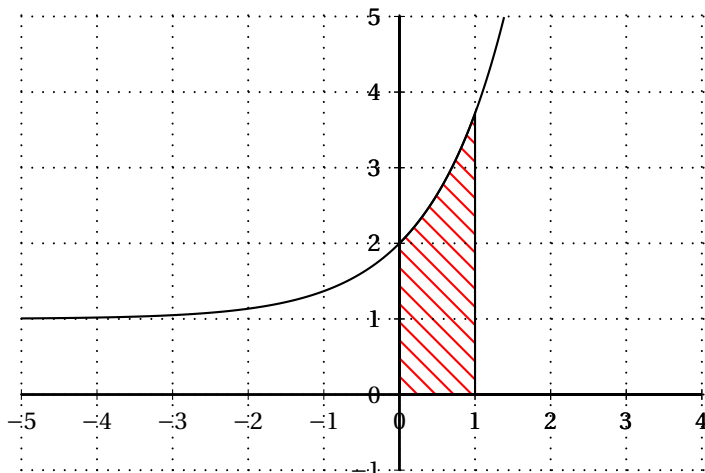
1. On pose dans cette question  $a = 0$ .

$$f_0(x) = 0 \text{ donc } I(0) = \int_0^1 0 dx = 0$$

2. On pose dans cette question  $a = 1$ .

On étudie donc la fonction  $f_1$  définie sur  $\mathbf{R}$  par :  $f_1(x) = e^x + 1$ .

- a. On représente la fonction  $f_1$  dans un repère orthogonal :



On connaît la représentation graphique de la fonction exponentielle donc on peut, sans étude, représenter la fonction  $f_1$ .

- b. La fonction  $F_1$  définie par  $F_1(x) = e^x + x$  est une primitive de la fonction  $f_1$ .

$$\text{Donc } I(1) = \int_0^1 f(x) dx = \left[ F_1(x) \right]_0^1 = F_1(1) - F_1(0) = (e^1 + 1) - (e^0 + 0) = e + 1 - 1 = e \approx 2,7$$

3. On cherche s'il existe une valeur de  $a$  pour laquelle  $I(a)$  est égale à 2.

La fonction  $F$  définie sur  $\mathbf{R}$  par  $F_a(x) = e^{ax} + ax$  est une primitive de  $f$ .

$$\text{Donc } I(a) = \int_0^1 f_a(x) dx = F_a(1) - F_a(0) = (e^a + a) - (e^0 + 0) = e^a + a - 1$$

Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0; 1]$  par  $g(x) = e^x + x - 1$ .

$g$  est dérivable donc continue et  $g'(x) = e^x + 1 > 0$  sur  $[0; 1]$ .

$$g(0) = e^0 + 0 - 1 = 0 < 2 \text{ et } g(1) = e^1 + 1 - 1 = e \approx 2,72 > 2$$

La fonction  $g$  est continue et strictement croissante sur  $[0; 1]$  ;  $g(0) < 2$  et  $g(1) > 2$  donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $g(x) = 2$  admet une solution unique dans l'intervalle  $[0; 1]$ .

Il existe donc une valeur unique de  $a$  dans  $[0; 1]$  telle que  $I(a) = 2$ .

$$\begin{cases} f(0,7) \approx 1,71 < 2 \\ f(0,8) \approx 2,03 > 2 \end{cases} \implies a \in [0,7; 0,8] \qquad \begin{cases} f(0,79) \approx 1,99 < 2 \\ f(0,80) \approx 2,03 > 2 \end{cases} \implies a \in [0,79; 0,80]$$

## EXERCICE 3

## Commun à tous les candidats

7 points

## Partie A : premier modèle – avec une suite

On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite  $(u_n)$  définie de la façon suivante :

$$u_0 = 1\,000 \text{ et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = 1,2u_n - 100.$$

1. a. On appelle  $u_n$  la masse, en gramme, des bactéries présentes dans la cuve, et  $n$  représente le nombre de jours depuis le début du processus. On a donc  $u_0 = 1\,000$  puisqu'initialement, on introduit 1 kg soit 1 000 grammes de bactéries.

D'un jour à l'autre, le nombre de bactéries augmente de 10 %, c'est donc qu'il est multiplié par  $1 + \frac{20}{100} = 1,2$ . Chaque jour, en remplaçant le milieu nutritif, on perd 100 grammes de bactéries.

Donc, pour tout  $n$ ,  $u_{n+1} = 1,2u_n - 100$  avec  $u_0 = 1\,000$ .

- b. L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg soit 30 000 g.

On cherche le plus petit entier  $n$  tel que  $u_n > 30\,000$ .

À la calculatrice, on trouve  $u_{22} \approx 28\,103$  et  $u_{23} \approx 33\,624$ ; donc on dépasse 30 kg de bactéries à partir de 23 jours.

- c. On complète l'algorithme :

<b>Variables</b>	$u$ et $n$ sont des nombres
<b>Traitement</b>	$u$ prend la valeur 1 000 $n$ prend la valeur 0 Tant que $u \leq 30\,000$ faire $u$ prend la valeur $1,2 \times u - 100$ $n$ prend la valeur $n + 1$ Fin Tant que
<b>Sortie</b>	Afficher $n$

2. a. Soit  $\mathcal{P}_n$  la propriété  $u_n \geq 1\,000$ .

- $u_0 = 1\,000 \geq 1\,000$  donc la propriété est vraie pour  $n = 0$ .
- On suppose la propriété vraie pour un rang quelconque  $p \in \mathbf{N}$ ,  $p \geq 0$ , c'est-à-dire  $u_p \geq 1\,000$ .  
 $u_{p+1} = 1,2u_p - 100$ ;  $u_p \geq 1\,000$  donc  $1,2u_p \geq 1\,200$  donc  $1,2u_p - 100 \geq 1\,100$ .  
 Donc  $1,2u_p - 100 \geq 1\,000$  et on a démontré que la propriété était vraie au rang  $p+1$ .
- La propriété est vraie au rang 0, elle est héréditaire pour tout  $n \geq 0$ , donc d'après le principe de récurrence elle est vraie pour tout  $n \geq 0$ .

Pour tout  $n$ ,  $u_n \geq 1\,000$ .

- b. Pour tout  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n = 1,2u_n - 100 - u_n = 0,2u_n - 100$

Or, pour tout  $n$ ,  $u_n \geq 1\,000$  donc  $0,2u_n \geq 200$  et donc  $0,2u_n - 100 \geq 100$

On a donc démontré que, pour tout  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n > 0$ .

On peut donc dire que la suite  $(u_n)$  est croissante.

3. On définit la suite  $(v_n)$  par : pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = u_n - 500$  donc,  $u_n = v_n + 500$ .

- a.  $v_{n+1} = u_{n+1} - 500 = 1,2u_n - 100 - 500 = 1,2(v_n + 500) - 600 = 1,2v_n + 600 - 600 = 1,2v_n$   
 $v_0 = u_0 - 500 = 1\,000 - 500 = 500$

Donc la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison  $q = 1,2$  et de premier terme  $v_0 = 500$ .

- b. On déduit de la question précédente que, pour tout  $n$ ,  $v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 1,2^n$ .  
Comme, pour tout  $n$ ,  $u_n = v_n + 500$ , on en déduit que  $u_n = 500 + 500 \times 1,2^n$ .
- c. La suite  $(v_n)$  est géométrique de raison 1,2 et de premier terme positif; or  $1,2 > 1$  donc, d'après le cours,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .  
Pour tout  $n$ ,  $u_n = v_n + 500$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

### Partie B : second modèle – avec une fonction

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(t) = \frac{50}{1 + 49e^{-0,2t}}$ .

1. a.  $f(0) = \frac{50}{1 + 49e^0} = \frac{50}{1 + 49} = 1$

b. Pour tout  $t$ ,  $e^{-0,2t} > 0$  donc  $1 + 49e^{-0,2t} > 1$  et donc  $\frac{1}{1 + 49e^{-0,2t}} < 1$

On en déduit que  $\frac{50}{1 + 49e^{-0,2t}} < 50$  et donc que, pour tout  $t$ ,  $f(t) < 50$ .

c. La fonction  $t \mapsto -0,2t$  est décroissante sur  $\mathbf{R}$ . La fonction  $x \mapsto e^x$  est croissante sur  $\mathbf{R}$  donc, par composition, la fonction  $t \mapsto e^{-0,2t}$  est décroissante sur  $\mathbf{R}$ .

On en déduit que la fonction  $t \mapsto 1 + 49e^{-0,2t}$  est décroissante sur  $\mathbf{R}$ .

La fonction inverse est décroissante sur  $]0; +\infty[$  donc, par composition, la fonction  $t \mapsto \frac{1}{1 + 49e^{-0,2t}}$  est croissante sur  $\mathbf{R}$ .

On en conclut que la fonction  $f$  est croissante sur  $\mathbf{R}$  donc sur  $[0; +\infty[$ .

d.  $\lim_{t \rightarrow +\infty} -0,2t = -\infty$ ; on pose  $T = -0,2t$ . Or  $\lim_{T \rightarrow -\infty} e^T = 0$  donc  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,2t} = 0$ .

On en déduit que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} 1 + 49e^{-0,2t} = 1$  et donc que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 50$ .

2. On sait que  $f(t)$  représente la masse, en kg, de bactéries au temps  $t$ , exprimé en jours.

- $f(0) = 1$  signifie que la masse des bactéries à l'instant  $t = 0$  est de 1 kg;
- $f(t) < 50$  pour tout  $t$  signifie que la masse de bactéries dans la cuve sera toujours inférieure à 50 kg;
- $f$  est croissante signifie que la masse de bactéries augmente régulièrement au fil du temps;
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 50$  signifie que la masse de bactéries dans la cuve va se rapprocher de 50 kg.

3. On résout l'inéquation d'inconnue  $t$  :  $f(t) > 30$  :

$$\begin{aligned} f(t) > 30 &\Leftrightarrow \frac{50}{1 + 49e^{-0,2t}} > 30 \\ &\Leftrightarrow 50 > 30 + 30 \times 49e^{-0,2t} \quad \text{car } 1 + 49e^{-0,2t} > 0 \text{ pour tout } t \\ &\Leftrightarrow \frac{50 - 30}{30 \times 49} > e^{-0,2t} \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{147} > e^{-0,2t} \\ &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{2}{147}\right) > -0,2t \quad \text{croissance de la fonction } \ln \text{ sur } [0; +\infty[ \\ &\Leftrightarrow \frac{\ln\left(\frac{2}{147}\right)}{-0,2} < t \quad \text{division par un nombre négatif} \end{aligned}$$

Or  $\frac{\ln\left(\frac{2}{147}\right)}{-0,2} \approx 21,5$  donc on en conclut que la masse de bactéries dépassera 30 kg au bout de 22 jours.

**Partie C : un contrôle de qualité**

On prend un échantillon de taille  $n = 200$  et dans lequel l'entreprise affirme que 80 % des bactéries (celles de type A) produiront une protéine; donc la proportion de bactéries de type A est  $p = 0,8$ .

$n = 200pg50$ ;  $np = 160 \geq 5$  et  $n(1-p) = 40 \geq 5$  donc les conditions sont vérifiées pour qu'on établisse un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % :

$$\left[ p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] = \left[ 0,8 - 1,96 \frac{\sqrt{0,8 \times 0,2}}{\sqrt{200}} ; 0,8 + 1,96 \frac{\sqrt{0,8 \times 0,2}}{\sqrt{200}} \right] \approx [0,74 ; 0,86]$$

La fréquence de bactéries dans l'échantillon est de  $f = \frac{146}{200} = 0,73$ ; cette fréquence n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation calculé.

Donc, au risque de 5 %; on peut remettre en cause l'affirmation de l'entreprise.

**EXERCICE 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 4 points****1. Propriété des catadioptrés**

Un rayon lumineux de vecteur directeur  $\vec{v}(a; b; c)$  est réfléchi successivement par les plans (OAB), (OBC) et (OAC).

Après réflexion sur le plan (OAB), le rayon a un vecteur directeur de coordonnées  $(a; b; -c)$ .

Après réflexion sur le plan (OBC), le rayon a un vecteur directeur de coordonnées  $(-a; b; -c)$ .

Après réflexion sur le plan (OAC), le rayon a un vecteur directeur de coordonnées  $(-a; -b; -c)$  donc qui est égal à  $-\vec{v}$ ; le rayon final est donc parallèle au rayon initial.

**2. Réflexion de  $d_2$  sur le plan (OBC)**

- a. La droite  $d_2$  passe par le point  $I_1(2; 3; 0)$  et a pour vecteur directeur  $\vec{v}_2(-2; -1; 1)$ , donc  $d_2$  a pour représentation paramétrique

$$d_2 : \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbf{R}.$$

- b. Le plan (OBC) a pour vecteur normal le vecteur  $\vec{OA}$  de coordonnées  $(1; 0; 0)$ .

Le plan (OBC) a pour équation  $x = 0$ .

- c. Soit  $I_2$  le point de coordonnées  $(0; 2; 1)$ .

- $x_{I_2} = 0$  donc le point  $I_2$  appartient au plan (OBC) d'équation  $x = 0$ .
- On regarde si la droite  $d_2$  contient le point  $I_2$  autrement dit s'il existe une valeur du paramètre  $t$  telle que 
$$\begin{cases} 0 = 2 - 2t \\ 2 = 3 - t \\ 1 = t \end{cases}$$
C'est vrai pour  $t = 1$  donc  $I_2 \in d_2$ .
- Le point  $I_1$  appartient à la droite  $d_2$  mais n'appartient pas au plan (OBC) car son abscisse est non nulle; la droite  $d_2$  n'est donc pas contenue dans le plan (OBC).

On a donc démontré que le plan (OBC) et la droite  $d_2$  étaient sécants en  $I_2$ .

### 3. Réflexion de $d_3$ sur le plan (OAC)

La droite  $d_3$  passe par le point  $I_2(0; 2; 1)$  et a pour vecteur directeur  $\vec{v}_3(2; -1; 1)$ ; elle a donc pour représentation paramétrique :

$$d_3 : \begin{cases} x = 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbf{R}.$$

Le plan (OAC) a pour équation  $y = 0$ .

Pour déterminer le point d'intersection de la droite  $d_3$  et du plan (OAC), on résout le système :

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \\ y = 0 \end{cases}$$

$y = 0$  et  $y = 2 - t$  entraîne  $t = 2$  donc  $x = 4$  et  $z = 3$ .

Le point  $I_3$  d'intersection de  $d_3$  et du plan (OAC) a pour coordonnées  $(4; 0; 3)$ .

### 4. Étude du trajet de la lumière

On donne le vecteur  $\vec{u}(1; -2; 0)$ , et on note  $\mathcal{P}$  le plan défini par les droites  $d_1$  et  $d_2$ .

- a. • Le plan  $\mathcal{P}$  est défini par les droites  $d_1$  et  $d_2$  donc il a pour vecteurs directeurs les vecteurs  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  qui ne sont pas colinéaires.
- $\vec{u} \cdot \vec{v}_1 = -2 + 2 + 0 = 0$  donc  $\vec{u} \perp \vec{v}_1$
  - $\vec{u} \cdot \vec{v}_2 = -2 + 2 + 0 = 0$  donc  $\vec{u} \perp \vec{v}_2$

Le vecteur  $\vec{u}$  est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan  $\mathcal{P}$ , donc  $\vec{u}$  est un vecteur normal au plan  $\mathcal{P}$ .

- b. Le plan  $\mathcal{P}$  contient les droites  $d_1$  et  $d_2$ ; les trois droites  $d_1$ ,  $d_2$  et  $d_3$  seront dans un même plan si et seulement si elles sont dans le plan  $\mathcal{P}$ , c'est-à-dire si et seulement si la droite  $d_3$  est contenue dans le plan  $\mathcal{P}$ .

On cherche une équation du plan  $\mathcal{P}$ .

Le plan  $\mathcal{P}$  a le vecteur  $\vec{u}$  pour vecteur normal et il contient le point  $I_1$  qui appartient à  $d_1$ ; donc :

$$\mathcal{P} = \left\{ M \mid \overrightarrow{I_1M} \perp \vec{u} \right\}$$

Si on appelle  $(x; y; z)$  les coordonnées de M, les coordonnées de  $\overrightarrow{I_1M}$  sont  $(x - 2; y - 3; z)$ .

$$\overrightarrow{I_1M} \perp \vec{u} \iff \overrightarrow{I_1M} \cdot \vec{u} = 0 \iff (x - 2)(1) + (y - 3)(-2) + z(0) = 0 \iff x - 2y + 4 = 0$$

Le plan  $\mathcal{P}$  a pour équation  $x - 2y + 4 = 0$ .

La droite  $d_3$  a pour représentation paramétrique  $\begin{cases} x = 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$  avec  $t \in \mathbf{R}$ .

En prenant  $t = 1$ , on prouve que le point H  $(2; 1; 2)$  appartient à  $d_3$ .

Mais  $x_H - 2y_H + 4 = 4 \neq 0$  donc  $H \notin \mathcal{P}$ .

La droite  $d_3$  n'est pas contenue dans  $\mathcal{P}$  donc les trois droites  $d_1$ ,  $d_2$  et  $d_3$  ne sont pas situées dans un même plan.

- c. Le plan  $\mathcal{P}$  contient les droites  $d_1$  et  $d_2$ ; les trois droites  $d_1$ ,  $d_2$  et  $d_4$  seront dans un même plan si et seulement si elles sont dans le plan  $\mathcal{P}$ , c'est-à-dire si et seulement si la droite  $d_4$  est contenue dans le plan  $\mathcal{P}$ .

La droite  $d_4$  représente le rayon lumineux après réflexion sur le plan (OAC); le point d'intersection du rayon avec le plan (OAC) est le point  $I_3(4; 0; 3)$  donc  $I_3 \in d_4$ .

$$x_{I_3} - 2y_{I_3} + 4 = 8 \neq 0 \text{ donc } I_3 \notin \mathcal{P}$$

La droite  $d_4$  n'est pas contenue dans le plan  $\mathcal{P}$ , donc les trois droites  $d_1$ ,  $d_2$  et  $d_4$  ne sont pas situées dans un même plan.

## EXERCICE 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 4 points

### Partie A : quelques résultats

1. On considère l'équation (E) :  $9d - 26m = 1$ , où  $d$  et  $m$  désignent deux entiers relatifs.

a. Les nombres 9 et 26 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de BÉZOUT, l'équation (E) :  $9d - 26m = 1$  admet des solutions entières.

$$9 \times 3 - 26 \times 1 = 1 \text{ donc le couple } (3; 1) \text{ est solution de l'équation (E).}$$

b. Le couple  $(d; m)$  est solution de (E) si et seulement si  $9d - 26m = 1$   
 si et seulement si  $9d - 26m = 9 \times 3 - 26 \times 1$   
 si et seulement si  $9(d - 3) - 26(m - 1) = 0$   
 si et seulement si  $9(d - 3) = 26(m - 1)$

c.  $9(d - 3) = 26(m - 1)$  donc 9 divise  $26(m - 1)$ . Or 9 et 26 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de GAUSS, 9 divise  $m - 1$ . On peut donc écrire  $m - 1$  sous la forme  $9k$  avec  $k \in \mathbf{Z}$ . Donc  $m = 9k + 1$  avec  $k \in \mathbf{Z}$ .

$$9(d - 3) = 26(m - 1) \text{ et } m - 1 = 9k \text{ donc } 9(d - 3) = 26 \times 9k \text{ ce qui équivaut à } d - 3 = 26k \text{ ou encore } d = 26k + 3 \text{ avec } k \in \mathbf{Z}.$$

Réciproquement, si  $d = 26k + 3$  et  $m = 9k + 1$  avec  $k \in \mathbf{Z}$ , alors

$$9d - 26m = 9(26k + 3) - 26(9k + 1) = 9 \times 26k + 27 - 26 \times 9k - 26 = 1 \text{ et donc le couple } (d; m) \text{ est solution de (E).}$$

Les solutions de l'équation (E) sont donc les couples  $(d; m)$  tels que

$$\begin{cases} d = 26k + 3 \\ m = 9k + 1 \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbf{Z}.$$

2. a. Soit  $n$  un nombre entier.

$$n = 26k - 1 \iff 26k - n = 1 \iff 26k + n(-1) = 1$$

Il existe donc deux entiers relatifs  $k$  et  $-1$  tels que  $26k + n(-1) = 1$  donc, d'après le théorème de BÉZOUT, les nombres  $n$  et 26 sont premiers entre eux.

b. Soit  $n = 9d - 28$ , avec  $d = 26k + 3$  et  $k \in \mathbf{Z}$ .

$$n = 9d - 28 = 9(26k + 3) - 28 = 9 \times 26k + 27 - 28 = 26(9k) - 1 = 26K - 1 \text{ où } K \in \mathbf{Z}$$

D'après la question précédente, on peut déduire que  $n = 9d - 28$  et 26 sont premiers entre eux.

### Partie B : cryptage et décryptage

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ .

1. En cryptant par cette méthode le mot « PION », on obtient « LZWH »; on veut crypter le mot « ESPION ».

$$\text{Les lettres ES correspondent à la matrice colonne } \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 + 72 \\ 28 + 54 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 108 \\ 82 \end{pmatrix}$$



$108 = 4 \times 26 + 4$  donc  $108 \equiv 4 \pmod{26}$  } donc  $\begin{pmatrix} 108 \\ 82 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \pmod{26}$  ce qui correspond à EE.

Le mot ESPION se code donc en EELZWH.

## 2. Méthode de décryptage

a.  $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ ;  $\det(A) = 9 \times 3 - 4 \times 7 = -1 \neq 0$  donc la matrice  $A$  est inversible.

On trouve son inverse à la calculatrice :  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}$

b. Au cryptage, une matrice colonne  $X$  correspondant à deux lettres, est d'abord transformée en la matrice  $Y$  telle que  $AX = Y$ . Puis on cherche la matrice  $Y'$  composée de nombres entiers entre 0 et 25 et telle que  $Y' \equiv Y \pmod{26}$ .

Au décryptage, on cherche la matrice colonne  $Y$  correspondant aux deux lettres à décrypter. Puis on détermine la matrice  $X$  telle que  $AX = Y$ , autrement dit telle que  $X = A^{-1}Y$ . Enfin on détermine la matrice colonne  $X'$  composée des restes des éléments de  $X$  modulo 26.

Comme  $X \equiv X' \pmod{26}$ , d'après le texte  $AX \equiv AX' \pmod{26}$  et donc  $AX$  et  $AX'$  correspondent à la même matrice colonne  $Y$  modulo 26; ce qui valide le processus de décryptage.

Pour décrypter les lettres XQ, on cherche la matrice colonne correspondant à ces deux lettres :  $\begin{pmatrix} 23 \\ 16 \end{pmatrix}$  puis on multiplie à gauche par la matrice  $A^{-1}$

$\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 7 & -9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 23 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \times 23 + 4 \times 16 \\ 7 \times 23 - 9 \times 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 17 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 21 \\ 17 \end{pmatrix} \pmod{26}$  ce qui correspond à VR.

On fait de même avec GY représenté par  $\begin{pmatrix} 6 \\ 24 \end{pmatrix}$  :

$\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 7 & -9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \times 6 + 4 \times 24 \\ 7 \times 6 - 9 \times 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78 \\ -174 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} \pmod{26}$  ce qui correspond à AI.

Le mot XQGY se décode en VRAI.