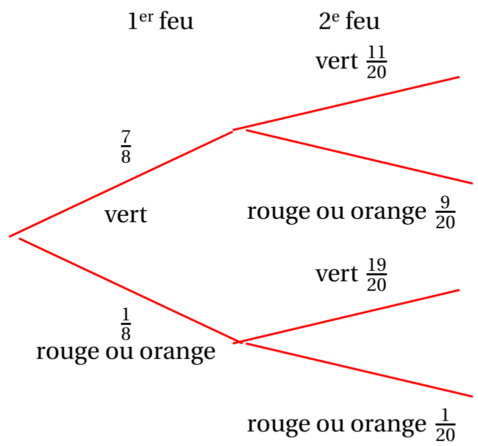
Corrigé du baccalauréat S Asie juin 2002

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. **a.** Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



b. D'après l'arbre :

- $p(X=0) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{20} = \frac{1}{160}$;
- $p(X=1) = \frac{1}{8} \times \frac{19}{20} + \frac{7}{8} \times \frac{9}{20} = \frac{19+63}{160} = \frac{82}{160}$;
- $p(X=2) = \frac{7}{8} \times \frac{11}{20} = \frac{77}{160}$.

On a bien $p(X=0) + p(X=1) + p(X=2) = \dfrac{1+82+77}{160} = 1$.

c. $\mathrm{E}(X) = 0 \times \frac{1}{160} + 1 \times \frac{82}{160} + 2 \times \frac{77}{160} = \frac{82+154}{160} = \frac{236}{160} = \frac{59}{40} \approx 1,5$.

Sur 20 feux rencontrés on aura à peu près 15 feux verts.

2. **a.** D'après l'énoncé $p_{E_n}(E_{n+1}) = \dfrac{1}{20}$ et $p_{\overline{E_n}}(E_{n+1}) = \dfrac{9}{20}$.

b. D'après la loi des probabilités totales :

$p(E_{n+1}) = p(E_{n+1} \cap E_n) + p\left(E_{n+1} \cap \overline{E_n}\right) = p(E_n) \times p_{E_n}(E_{n+1}) +$
$p\left(\overline{E_n}\right) \times p_{\overline{E_n}}(E_{n+1}) = p_n \times \dfrac{1}{20} + (1-p_n) \times \dfrac{9}{20} = \dfrac{1}{20}p_n + \dfrac{9}{20}q_n$.

Pour tout naturel $n \geqslant 1$, $\quad p_{n+1} = \dfrac{1}{20}p_n + \dfrac{9}{20}q_n$.

c. $p_{n+1} = \dfrac{1}{20}p_n + \dfrac{9}{20}\left(1-p_n\right) = p_n\left(\dfrac{1}{20} - \dfrac{9}{20}\right) + \dfrac{9}{20} = \dfrac{9}{20} - \dfrac{8}{20}p_n$.

$p_{n+1} = \dfrac{9}{20} - \dfrac{2}{5}p_n$.

3. **a.** On a $u_{n+1} = 28p_{n+1} - 9 = 28\left(\dfrac{9}{20} - \dfrac{2}{5}p_n\right) - 9 = \dfrac{63}{5} - 9 - \dfrac{2}{5} \times 28p_n =$
$\dfrac{18}{5} - \dfrac{2}{5} \times 28p_n = -\dfrac{2}{5}\left(28p_n - 9\right) = -\dfrac{2}{5}u_n$.

Quel que soit $n \geqslant 1$, l'égalité $u_{n+1} = -\dfrac{2}{5}u_n$ montre que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{2}{5}$, de premier terme $u_1 = 28p_1 - 9 = 28 \times \dfrac{1}{8} - 9 = \dfrac{7}{2} - 9 = -\dfrac{11}{2}$.

b. On sait qu'alors pour $n \geqslant 1$, $\quad u_n = -\dfrac{11}{2} \times \left(-\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}$.

Or $u_n = 28p_n - 9 \iff p_n = \dfrac{u_n + 9}{28} = \dfrac{u_n}{28} + \dfrac{9}{28} = \dfrac{1}{28}\left[-\dfrac{11}{2} \times \left(-\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}\right] + \dfrac{9}{28}$

c. Comme $-1 < -\dfrac{2}{5} < 1$, on sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{2}{5}\right)^{n-1} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} -\dfrac{11}{2}\times\left(-\dfrac{2}{5}\right)^{n-1} =$ 0, donc par limite de somme :

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{9}{28} \approx 0,32.$

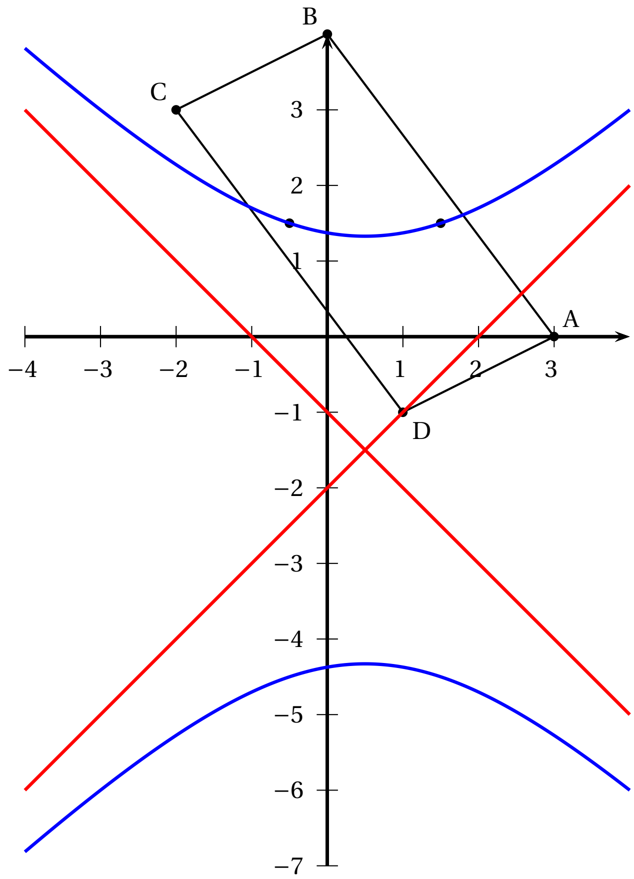
Sur un grand nombre de feux rencontrés la probabilité qu'Amélie rencontre un feu orange ou rouge est donc à peu près de 1 sur 3.

EXERCICE 2 — 5 points

Enseignement obligatoire

1. Dans le plan complexe $(\mathscr{P})$ rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, on considère les quatre points A, B, C et D d'affixes respectives 3, 4i, $-2+3\mathrm{i}$ et $1-\mathrm{i}$.

a.



b. Le milieu de [AC] a pour coordonnées $\left(\frac{3-2}{2}\ ;\ \frac{0+3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{3}{2}\right)$.

Le milieu de [BD] a pour coordonnées $\left(\frac{0+1}{2}\ ;\ \frac{4-1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{3}{2}\right)$.

Le quadrilatère ABCD a ses diagonales qui ont le même milieu : c'est un parallélogramme.

$$z^2-(1+3\mathrm{i})z-6+9\mathrm{i}=0 \quad (1) \quad \text{et} \quad z^2-(1+3\mathrm{i})z+4+4\mathrm{i}=0 \quad (2)$$

2. a. $z_1 \in \mathbb{R}$ est solution de (1) si et seulement si :

$z_1^2-(1+3\mathrm{i})z_1-6+9\mathrm{i}=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} z_1^2-z_{-}6 & = & 0 \\ -3z_1+9 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} z_1^2-z_1-6 & = & 0 \\ z_1 & = & 3 \end{array}\right.$

$z_1 = 3$ est solution de (1).

$z_2 = a\mathrm{i}$ $(a \in \mathbb{R})$ est solution de (2) si et seulement si :

$z_2^2-(1+3\mathrm{i})z_2-6+9\mathrm{i}=0$ ou $-a^2-(a\mathrm{i}-3a)+4+4\mathrm{i}=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl}-a^2+3a+4 &=& 0\\ -a+4 &=& 0\end{array}\right. \iff$ $\left\{\begin{array}{rcl}-a^2+3a-6 &=& 0\\ a &=& 4\end{array}\right.$.

$z_2=4\mathrm{i}$ est solution de (2).

b. $(z-3)(z+2-3\mathrm{i}) = z^2+2z-3\mathrm{i}z-3z-6+9\mathrm{i} = z^2-z(1+3\mathrm{i})-6+9\mathrm{i}$.
$(z-4\mathrm{i})(z-1+\mathrm{i}) = z^2-z+z\mathrm{i}-4z\mathrm{i}+4\mathrm{i}+4 = z^2-z(1+3\mathrm{i})+4\mathrm{i}+4$.

c.

$$\left(z^2-(1+3\mathrm{i})z-6+9\mathrm{i}\right)\left(z^2-(1+3\mathrm{i})z+4+4\mathrm{i}\right)=0.$$

$\left(z^2-(1+3\mathrm{i})z-6+9\mathrm{i}\right)\left(z^2-(1+3\mathrm{i})z+4+4\mathrm{i}\right)=0 \iff$

$\left\{\begin{array}{rcl}z^2-(1+3\mathrm{i})z-6+9\mathrm{i} &=& 0\\ z^2-(1+3\mathrm{i})z+4+4\mathrm{i} &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}z-3 &=& 0\\ z-1+\mathrm{i} &=& 0\\ z-4\mathrm{i} &=& 0\\ z-1+\mathrm{i} &=& 0\end{array}\right.$.

L'équation a donc quatre solutions : 3 ; $4\mathrm{i}$; $-2+3\mathrm{i}$; $1-\mathrm{i}$.

d. On a donc $z_0=1-\mathrm{i}$.
$\left|z_0^2\right|^2=1+1=2$, donc $\left|z_0^2\right|=\sqrt{2}$.
On a donc $z_0=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}$.

e. Puisque $z_0=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}$, alors $z_0^n=\left(\sqrt{2}\right)^n\mathrm{e}^{-n\frac{\pi}{4}}$.
Donc $M_n\in y=x \iff -n\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k\pi$, avec $k\in\mathbb{Z}$, soit
$-n\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+k \iff -n=1+4k \iff n=-1-4k$, avec $k\in\mathbb{Z}$.
En posant $k'=-k$, les solutions naturelles sont donc les nombres $n=-1+4k'$ avec $k\in\mathbb{N}*$.

3. **a.** $z'=z^2-(1+3\mathrm{i})z-6+9\mathrm{i}=z'=(x+\mathrm{i}y)^2-(1+3\mathrm{i})(x+\mathrm{i}y)-6+9\mathrm{i}=x^2-y^2+2\mathrm{i}xy-x-\mathrm{i}y+3x\mathrm{i}-3y+6+9\mathrm{i}=x^2-y^2-x-3y+6+\mathrm{i}(2xy-3x-y+9)$.
On a donc :

$$x'=x^2-y^2-x-3y+6 \quad \text{et} \quad y'=2xy-3x-y+9.$$

b. $f(M)$ appartient à l'axe des ordonnées si $x'=0 \iff x^2-y^2-x-3y+6=0$.
Remarque : $x^2-y^2-x-3y+6=0 \iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}+6=0 \iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+8=0$.
En posant $X=x-\frac{1}{2}$ et $Y=y+\frac{3}{2}$ (changement d'origine), l'équation s'écrit $X^2-Y^2=-8 \iff (X+Y)(X-Y)=-8$.
C'est une hyperbole de centre le point $\Omega\left(\frac{1}{2}\ ;\ -\frac{3}{2}\right)$.
Vérification : soit E(1,5 ; 1,5) un point de (H) ; son image f(E) a pour coordonnées (0 ; 7,5) ;
F(0,5 ; 1,5) un autre point de (H) ; son image f(F) a pour coordonnées (0 ; 7,5).

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

1. • *Initialisation :* On a bien $5\times1-8+3=0$, soit $5x_0-y_0+3=0$, donc $M_0\in(\Delta)$.
• *Hérédité :* Supposons que pour n naturel, on ait $M_n\in(\Delta)$, c'est-à-dire que $5x_n-y_n+3=0$.
Calculons $5x_{n+1}-y_{n+1}+3=5\left(\frac{7}{3}x_n+\frac{1}{3}y_n+1\right)-\left(\frac{20}{3}x_n+\frac{8}{3}y_n+5\right)+3=$
$x_n\left(\frac{35}{3}-\frac{20}{3}\right)+y_n\left(\frac{5}{3}-\frac{8}{3}\right)+3=5x_n-y_n+3=0$.

La relation est vraie au rang 0 et, si elle est vraie au rang n, elle est vraie au rang $n+1$: on a démontré par le principe de récurrence que quel que le naturel n, $5x_n - y_n + 3 = 0$, c'est-dire que tous les points M_n appartiennent à la droite (Δ).

• $\left\{\begin{array}{l c l} x_{n+1} & = & \dfrac{7}{3}x_n + \dfrac{1}{3}y_n + 1 \\ y_{n+1} & = & \dfrac{20}{3}x_n + \dfrac{8}{3}y_n + 5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} 8x_{n+1} & = & \dfrac{56}{3}x_n + \dfrac{8}{3}y_n + 8 \\ y_{n+1} & = & \dfrac{20}{3}x_n + \dfrac{8}{3}y_n + 5 \end{array}\right. \Rightarrow$

(par différence) $8x_{n+1} - y_{n+1} = 12x_n + 3$.

On a $y_{n+1} = 5x_{n+1} + 3$, donc

$8x_{n+1} - 5x_{n+1} - 3 = 12x_n + 3 \iff 3x_{n+1} = 12x_n + 6$ et enfin en simplifiant par 3 : $x_{n+1} = 4x_n + 2$.

2. *Initialisation :* x_0 et y_0 sont des naturels.

Hérédité : Supposons qu'il existe un naturel p tel que x_p et y_p soient des naturels.

$x_p \in \mathbb{N} \Rightarrow 4x_p \in \mathbb{N} \Rightarrow 4x_p + 2 \in \mathbb{N}$, soit $x_{p+1} \in \mathbb{N}$.

On a donc démontré par récurrence que tous les termes x_n sont des naturels.

Or on a pour tout naturel n, $y_n = 5x_n + 3$;

$x_n \in \mathbb{N} \Rightarrow 5x_n \in \mathbb{N} \Rightarrow 5x_p + 3 \in \mathbb{N}$, soit $y_n \in \mathbb{N}$.

3. Montrer que :

a. On a pour tout naturel n, $5x_n = y_n - 3$;

- si y_n est multiple de 3, $y_n - 3$ l'est aussi ; donc $5x_n$ est multiple de 3 et comme 5 est premier avec 3, x_n est divisible par 3.
- si x_n est multiple de 3, $y_n = 5x_n + 3$ l'est aussi, soit y_n est divisible par 3.

b. Supposons que x_n et y_n aient un diviseur commun différent de 3 ; il existe donc $k \in Z$ tel que $x_n = kd$ et $l \in Z$ tel que $y_n = ld$.

Or $y_n = 5x_n + 3 \iff ld = 5kd + 3 \iff (l - 5k)d = 3$ égalité qui montre que d divise 3 qui n'a pour diviseurs que 1 et 3 : c'est impossible puisque x_n et y_n ne sont pas divisibles par 3.

On a donc démontré par l'absurde que s'ils ne sont pas divisibles par 3, x_n et y_n sont premiers entre eux.

4. **a.** *Initialisation :* $\dfrac{1}{3}\left(4^0 \times 5 - 2\right) = \dfrac{1}{3} \times 3 = 1 = x_0$.

Hérédité : Supposons que pour n naturel, on ait : $x_n = \dfrac{1}{3}\left(4^n \times 5 - 2\right)$.

On a $x_{n+1} = 4x_n + 2 = 4 \times \dfrac{1}{3}\left(4^n \times 5 - 2\right) + 2 = \dfrac{1}{3}\left(4^{n+1} \times 5 - 2 \times 4\right) + 2 =$

$\dfrac{1}{3}\left(4^{n+1} \times 5 - 2 \times 4\right) + \dfrac{1}{3} \times 6 = \dfrac{1}{3}\left(4^{n+1} \times 5 - 8 + 6\right) = \dfrac{1}{3}\left(4^{n+1} \times 5 - 2\right)$: la relation est donc vraie au rang $n+1$.

La relation est vraie au rang 0 et, si elle est vraie a u rang n, elle l'est au rang $n+1$: donc d'après le principe de récurrence :

Quel que soit l'entier n, $x_n = \dfrac{1}{3}\left(4^n \times 5 - 2\right)$.

b. D'après la question précédente x_n étant un entier $4^n \times 5 - 2$ est un multiple de 3 car $3x_n = 4^n \times 5 - 2$.

PROBLÈME **10 points**

Partie 1

$$u(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln|x|.$$

1. x étant non nul, u est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme somme de fonctions dérivables et :

- si $x > 0$, $u'(x) = 6x^2 + 2\dfrac{1}{x} > 0$ car somme de deux termes supérieurs à zéro :

la fonction u est donc strictement croissante sur et sur $]0~;~+\infty[$.

- si $x < 0$, $u'(x) = 6x^2 - 2\dfrac{1}{-x} = 6x^2 + 2\dfrac{1}{x}$

$u'(x) = 0 \iff 6x^2 + 2\dfrac{1}{x} = 0 \iff 6x^3 + 2 = 0 \iff 3x^3 + 1 = 0 \iff$

$x^3 = -\dfrac{1}{3} \iff x = -\sqrt[3]{\frac{1}{3}} \approx -0,693$;

Donc $u'(x) > 0 \iff x < -\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$.

Donc u est croissante sur $\left]-\infty~;~-\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right[$ et décroissante sur $\left]-\sqrt[3]{\frac{1}{3}}~;~0\right[$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0} 2x^3 - 1 = -1$ et que $\lim\limits_{x\to 0} 2\ln|x| = -\infty$ que x soit positif ou négatif, on a donc par somme de limites : $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = -\infty$.

D'autre part l'extremum relatif $u\left(-\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right) = 2\left(-\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)^3 - 1 + 2\ln\left|-\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right| =$

$-\dfrac{2}{3} - 1 + 2\ln\left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right) = -\dfrac{5}{3} + 2\ln\left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right) = -\dfrac{5}{3} - 2\ln 3^{\frac{1}{3}} = -\dfrac{5}{3} - \dfrac{2}{3}\ln 3 = -\dfrac{1}{3}(5 + 2\ln 3)$

$\approx -2,399$.

D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		$-\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$		0		$+\infty$
$3x^3+1$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
x		$-$		$-$	‖	$+$	
$u'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
u		$\nearrow$	$\approx -2,399$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2. Par somme de limites, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} = x^3 = \lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln x = +\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$.

3. **a.** On a $u(0,5) \approx -2$ et $u(1) = 1$.

Sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}~;~1\right]$ est continue car dérivable et $u(0,5) \times u(1) < 0$: il existe donc un réel unique $\alpha \in \left[\dfrac{1}{2}~;~1\right]$ tel que $u(\alpha) = 0$.

Comme $u(x) < 0$ sur $]-\infty~;~0[$, u ne s'annule donc qu'en α.

b. On a $u(0,8) \approx -0,4$ et $u(0,9) \approx 0,2$, on a donc $0,8 < \alpha < 0,9$, soit $\dfrac{8}{10} < \alpha < \dfrac{9}{10}$.

4. Des questions précédentes, on déduit que $u(x) < 0$ sur $]-\infty~;~0[$ et sur $[0~;~\alpha[$ et $u(x) > 0$ sur $]\alpha~;~+\infty[$.

Partie 2

$$f(x) = 2x - \frac{\ln|x|}{x^2}.$$

1.
- Limite en 0 : comme $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.
- Limite en $+\infty$: on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln|x|}{x^2} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- Limite en $-\infty$: on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln|x|}{x^2} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

2. • Pour $x>0$: $f(x)=2x-\dfrac{\ln x}{x^2}$, donc :

$f'(x)=2-\dfrac{\frac{1}{x}\times x^2-2x\ln x}{x^4}=2-\dfrac{x-2x\ln x}{x^4}=2-\dfrac{1-2\ln x}{x^3}=\dfrac{2x^3-1+2\ln x}{x^3}=$

$f'(x)=\dfrac{u(x)}{x^3}$.

Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $u(x)$ pour $x>0$.

• Pour $x<0$: $f(x)=2x-\dfrac{\ln(-x)}{x^2}$, donc :

$f'(x)=2-\dfrac{-\frac{1}{x}\times x^2-2x\ln(-x)}{x^4}=2-\dfrac{-x-2x\ln(-x)}{x^4}=2-\dfrac{-1-2\ln(-x)}{x^3}=$

$\dfrac{2x^3+1+2\ln(-x)}{x^3}=\dfrac{-2(-x)^3+1+2\ln(-x)}{x^3}=-\dfrac{2(-x)^3-1+2\ln(-x)}{-(-x)^3}=$

$\dfrac{2(-x)^3-1+2\ln(-x)}{(-x)^3}=\dfrac{u(x)}{x^3}$.

Le signe de $f'(x)$ est donc l'opposé du signe de $u(x)$ pour $x<0$.

3. • Sur $]-\infty\,;\,0[$, $f'(x)>0$, donc f est croissante

• Sur $]0\,;\,\alpha[$, $f'(x)<0$, donc f est décroissante

• Sur $]\alpha\,;\,+\infty[$, $f'(x)>0$ donc f est croissante

4. **a.** α est défini par $u(\alpha)=0 \iff 2\alpha^3-1+2\ln|\alpha|=0 \iff 2\alpha^3-1+2\ln\alpha=0 \iff 2\ln\alpha=1-2\alpha^3$ puisque $\alpha>0$ ou encore $2\ln\alpha=1-2\alpha^3$.

$f(\alpha)=2\alpha-\dfrac{\ln\alpha}{\alpha^2}=2\alpha-\dfrac{\frac{1}{2}-\alpha^3}{\alpha^2}=2\alpha-\frac{1}{2\alpha^2}+\alpha=3\alpha-\dfrac{1}{2\alpha^2}$.

b. $0,8<\alpha<0,9\Rightarrow 2,4<3\alpha<2,7\quad(1)$;

$0,8<\alpha<0,9\Rightarrow 0,64<\alpha^2<0,81\to 0,128<2\alpha^2<1,62\Rightarrow$

$\dfrac{1}{1,62}<\dfrac{1}{2\alpha^2}<\dfrac{1}{1,28}$.

Comme $\dfrac{1}{1,62}\approx 0,617$ et $\dfrac{1}{1,28}\approx 0,781$, on peut donc écrire que

$0,6<\dfrac{1}{2\alpha^2}<0,8\Rightarrow -0,8<-\dfrac{1}{2\alpha^2}<-0,6$ et en ajoutant membre avec le premier encadrement (1) $2,4-0,8<3\alpha-\dfrac{1}{2\alpha^2}<2,7-0,6$ soit finalement : $1,6<f(\alpha)<2,1$.

Partie 3

1. On a $x'=-x$ et $y'=y$.

2. **a.** Puisque $x=-x'$ et $y=y'$, $y'=2(-x')-\dfrac{\ln|-x'|}{(-x')^2}$ soit :

$y'=-2x'-\dfrac{\ln|x'|}{(x')^2}$.

b. On a vu à la question 1. que la courbe Γ est la symétrique de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des ordonnées.

Soit p la fonction définie sur $\mathbb{R}*$ par : $d(x)=2x-\dfrac{\ln|x|}{x^2}-\left[-2x-\dfrac{\ln|x|}{x^2}\right]=4x$ qui est donc négative sur $]-\infty\,;\,0[$ et positive sur $]0\,;\,+\infty[$.

Ceci signifie que sur $]-\infty\,;\,0[$ la courbe $\mathscr{C}$ est sous la courbe Γ et que sur $]0\,;\,+\infty[$ la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de la courbe Γ.

Partie 4

1. $A(m)$ l'intégrale $\displaystyle\int_1^m\left[2x-\left(2x-\frac{\ln|x|}{x^2}\right)f(x)\right]\,\mathrm{d}x=\int_1^m\frac{\ln|x|}{x^2}\,\mathrm{d}x=\int_1^m\frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ puisque $m\geqslant 1>0$.

Soit $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x^2}$, d'où :
$u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = -\dfrac{1}{x}$.
Toutes ces fonctions sont continues car dérivables sur $[1~;~+\infty[$; on peut donc intégrer par parties :
$A(m) = \left[-\dfrac{\ln x}{x}\right]_1^m + \displaystyle\int_1^m \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{x}\right]_1^m = -\dfrac{\ln m}{m} - \dfrac{1}{m} + 0 + 1 =$
$A(m) = 1 - \dfrac{\ln m + 1}{m}$.

2. $A(m) = 1 - \dfrac{\ln m + 1}{m} = 1 - \dfrac{\ln m}{m} - \dfrac{1}{m}$.
On sait que $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} \dfrac{1}{m} = 0$, $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} \dfrac{\ln m}{m} = 0$, d'où par somme de limites

$$\lim_{m \to +\infty} A(m) = 1.$$