Corrigé du baccalauréat S Asie juin 2004

EXERCICE 1 **3 points**
Commun à tous les candidats

1. L'affirmation signifie que $f'(0) = -\dfrac{1}{4}$.
f est dérivable comme quotient de fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annulant pas car $1 + \mathrm{e}^x \geqslant 1 > 0$.
$f'(x) = -\dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$ et $f'(0) = -\dfrac{1}{(1+1)^2} = -\dfrac{1}{4}$.
L'affirmation est vraie.

2. $\overrightarrow{MM'} = -\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} \iff \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GM'} = -\overrightarrow{MG} - \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + 4\overrightarrow{MG} + 4\overrightarrow{GC} \iff \overrightarrow{GM'} = 3\overrightarrow{MG} \iff \overrightarrow{GM'} = -3\overrightarrow{GM}$ (car par définition du barycentre : $-\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 4\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.
La dernière égalité trouvée montre bien que M' est l'image de M dans l'homothétie de centre G et de rapport -3.

3. $f(x) = \dfrac{1}{2}x \iff x\sin 3x = \dfrac{1}{2}x \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ \sin 3x & = & \dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

$\sin 3x = \dfrac{1}{2} \iff \sin 3x = \sin\frac{\pi}{6}$ ou $\sin 3x = \sin\frac{5\pi}{6}$. Donc :
— d'une part $\sin 3x = \sin\frac{\pi}{6} \iff 3x = \frac{\pi}{6} \quad [2\pi] \iff x = \frac{\pi}{18} \quad \left[\frac{2\pi}{3}\right]$.
— ou d'autre part $\sin 3x = \sin\frac{5\pi}{6} \iff 3x = \frac{5\pi}{6} \quad [2\pi] \iff x = \frac{5\pi}{18} \quad \left[\frac{2\pi}{3}\right]$.
Donc l'affirmation est vraie.

EXERCICE 2 **5 points**
Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. a. On développe $(z - 7\mathrm{i})(z + \mathrm{i}) = z^2 - 6\mathrm{i}z + 7$.

b. $M \neq \mathrm{A}$ est invariant si et seulement si $M = M' \iff$
$z' = z \iff z = \dfrac{3\mathrm{i}z - 7}{z - 3\mathrm{i}} \iff z(z - 3\mathrm{i}) = 3\mathrm{i}z - 7 \iff z^2 - 3\mathrm{i}z = 3\mathrm{i}z - 7 \iff$
$z^2 - 6\mathrm{i}z + 7 = 0 \iff (z - 7\mathrm{i})(z + \mathrm{i}) = 0$ d'après la question précédente $\iff$
$\left\{\begin{array}{lcl} z & = & 7\mathrm{i} \\ z & = & -\mathrm{i}\end{array}\right.$
Il existe donc deux points invariants par f : B(7i) et C(−i).

2. a. On vérifie aisément que le milieu de [BC] est le point A qui est donc le centre du cercle Σ et que BC = 8 dont le rayon de Σ est égal à 4.
En posant $\theta = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AM}\right)$, on a en calculant l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM}$:
$z - 3\mathrm{i} = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \iff z = 3\mathrm{i} + 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

b. On a donc $z' = \dfrac{3\mathrm{i}\left(3\mathrm{i} + 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) - 7}{4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \dfrac{-16 + 12\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = 3\mathrm{i} - 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} =$
$3\mathrm{i} + 4(-\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = 3\mathrm{i} + 4(\cos(\pi - \theta) + \mathrm{i}\sin(\pi - \theta)) = 3\mathrm{i} + 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi - \theta)}$.
Cette dernière égalité montre que M' appartient lui aussi au cercle Σ.

c. On a avec $z = 3\mathrm{i} + 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,
$\overline{z} = -3\mathrm{i} + 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$
$-\overline{z} = 3\mathrm{i} - 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = z'$ comme on l'a vu à la question précédente.
Le point M' se construit en prenant le symétrique de M autour de l'axe des abscisses, puis le symétrique de ce point autour de O, ou encore plus simplement par symétrie autour de l'axe des ordonnées.

3. On reprend la question 2 mais avec un cercle de rayon r. Un point de ce cercle a une affixe égale à $z = 3\text{i} + r\text{e}^{\text{i}\theta}$.

On en déduit que :

$z' = \dfrac{3\text{i}\left(3\text{i} + r\text{e}^{\text{i}\theta}\right) - 7}{r\text{e}^{\text{i}\theta}} = \dfrac{-16 + 3r\text{i}\text{e}^{\text{i}\theta}}{r\text{e}^{\text{i}\theta}} = -\dfrac{16}{r}\text{e}^{-\text{i}\theta} + 3\text{i} = 3\text{i} + \dfrac{16}{r}\text{e}^{(\pi-\theta)}$.

Cette dernière égalité montre que M' appartient au cercle de centre A(3i) et de rayon $\dfrac{16}{r}$.

L'image d'un cercle de centre A est un cercle de centre A.

EXERCICE 2 — 5 points

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. a. Soit a pair et tel que $a^2 + 9 = 2^n \iff 9 = 2^n - a^2$.

Ceci ne peut être vrai puisque la différence de deux pairs est paire. Donc si a existe, a est impair.

b. On a donc $a = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}$, donc $a^2 + 9 = 2^n \iff 4k^2 + 4k + 10 = 2^n$.

Or $4k^2 + 4k + 10 \equiv 2 \quad [4]$ et $2^n \equiv 0 \quad [4]$, puisque $n \geqslant 4$.

Conclusion : il n'existe pas de solution à l'équation $a^2 + 9 = 2^n$.

2. a. $a^2 + 9 = 3^n$. Pour $n \geqslant 3,\ 3 \equiv -1 \quad [4]$, donc

$3^n \equiv (-1)^n \quad [4]$.

Si n est pair $3^n \equiv 1 \quad [4]$ et si n est impair $3^n \equiv -1 \quad [4]$ ou encore

$3^n \equiv 3 \quad [4]$.

b. Soit a tel que $a^2 + 9 = 3^n$. Si a est impair, son carré l'est aussi donc $a^2 + 9$ est pair, alors que 3^n est impair pour tout n.

Conclusion : si a existe, il est pair.

Puisque a est pair il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $a = 2p$, d'où $a^2 = 4p^2$.

Donc $a^2 \equiv 0 \quad [4]$.

Il en résulte que $a^2 + 9 \equiv 9 \quad [4]$ ou plus simplement $a^2 + 9 \equiv 1 \quad [4]$.

Conclusion : $a^2 + 9 = 3^n$ seulement si $3^n \equiv 1 \quad [4]$, mais ceci n'est vrai que si n est pair.

Si $a^2 + 9 = 3^n$, alors n est pair.

c. On pose donc $n = 2p,\ p \in \mathbb{N}$ supérieur à 1.

– Si $a = 0$, alors $a^2 + 9 = 9 = 3^{2p}$, d'où $p = 1$: impossible car $p > 1$.

– Donc $a \neq 0$

L'équation s'écrit $a^2 + 9 = 3^{2p} \iff 9 = (3^p)^2 - a^2 = 9 \iff$

$(3^p + a)(3^p - a) = 9$.

Les diviseurs de 9 sont 1, 3 et 9. Il y a donc deux possibilités

- $\begin{cases} 3^p + a &= 3 \\ 3^p - a &= 3 \end{cases}$ qui n'a pas de solution car les deux nombres ne sont pas égaux, a n'étant pas nul,
- $\begin{cases} 3^p + a &= 9 \\ 3^p - a &= 1 \end{cases}$

car $3^p + a > 3^p - a$. On en déduit en sommant : $2 \times 3^p = 10 \iff 3^p = 5$ qui n'a pas de solution car 5 n'est pas une puissance de 3.

Conclusion : l'équation $a^2 + 9 = 3^n$ n'a pas de solution.

3. $a^2 + 9 = 5^n,\ n \geqslant 2$

a. Supposons n impair ; il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$.

$5^n = 5^{2k+1} = 5^{2k} \times 5$, donc puisque $5 \equiv 2 \quad [3],\ 5^2 \equiv 2^2 \quad [3]$, ou $5^2 \equiv 1 \quad [3]$ et enfin $5^n \equiv 2 \quad [3]$.

Donc s'il existe une solution a, alors $a^2+9 \equiv 2 \quad [3]$.
Comme a est congru à 0, 1, ou 2 modulo 3, son carré est congru à 0 ou 1 modulo 3, et comme 9 est congru à 0 modulo 3, a^2+9 est congru à 0 ou 1 modulo 3, alors que 5^n est congru à 2 modulo 3.
Ces deux nombres ne sont donc pas égaux.
Conclusion : si n est impair l'équation $a^2+9=5^n,\ n \geqslant 2$ n'a pas de solution.

b. On suppose donc n pair ; il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $n=2k$ avec $k \geqslant 1$.
L'équation s'écrit :
$a^2+9=5^{2k} \iff a^2+9=\left(5^k\right)^2 \iff 9=\left(5^k\right)^2-a^2 \iff$
$\left(5^k+a\right)\left(5^k-a\right)=9$, d'où deux possibilités :

- $\left\{\begin{array}{rcl} 5^k+a &=& 3\\ 5^k-a &=& 3\end{array}\right.$ d'où par différence $2a=0 \iff a=0$, mais alors on aurait $a^2+9=9=5^n$ ce qui n'est pas possible puisque 9 n'est pas une puissance de 5.
- $\left\{\begin{array}{rcl} 5^k+a &=& 9\\ 5^k-a &=& 1\end{array}\right.$ soit en sommant $2\times 5^k=10 \iff 5^k=5 \iff k=1$ et donc $a=4$

Conclusion : l'équation $a^2+9=5^n,\ n \geqslant 2$ a une seule solution : 4.

EXERCICE 3 — 4 points

Commun à tous les candidats

1. $\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$ sont des vecteurs normaux respectivement à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les plans ne sont pas parallèles et sont donc sécants suivant une droite $\mathcal{D}$.
Tout point commun à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ a des coordonnées $(x~;~y~;~z)$ qui vérifient le système : $\left\{\begin{array}{rcr} 2x-y &=& -5\\ 3x+y-z &=& 0\end{array}\right.$

En posant $x=\alpha$, le système devient : $\left\{\begin{array}{rcr} x &=& \alpha\\ 2x-y &=& -5\\ 3x+y-z &=& 0\end{array}\right. \iff$

$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& \alpha\\ y &=& 2\alpha+5\\ z &=& 5\alpha+5\end{array}\right.$

2.
- $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{R}$ si un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est orthogonal à un vecteur normal à $\mathcal{R}$ c'est-à-dire si $\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5\\5\\-1\end{pmatrix}=0 \iff -5+10-5=0$ qui est bien vraie.
- Deux droites sont coplanaires si elles ont un point commun ou si elles sont parallèles.

  $\star$ Si elles sont sécantes c'est-à-dire si $\left\{\begin{array}{rcl} \alpha &=& -3\beta\\ 2\alpha+5 &=& 1+\beta\\ 5\alpha+5 &=& 2+2\beta\end{array}\right. \iff$

  $\left\{\begin{array}{rcl} \alpha &=& -3\beta\\ -6\beta+5 &=& 1+\beta\\ -15\beta+5 &=& 2+2\beta\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha &=& -3\beta\\ \beta &=& \dfrac{4}{7}\\ \beta &=& \dfrac{5}{17}\end{array}\right.$

  Ce système n'a pas de solution.
  Conclusion : les deux droites ne sont pas sécantes.

$\star$ Si elles sont parallèles leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.
$\mathcal{D}$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(1\ ;\ 2\ ;\ 5)$ et $\mathcal{D}'$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}\,(-3\ ;\ 1\ ;\ 2)$. Ces vecteurs ne sont manifestement pas colinéaires. Donc les droites ne sont pas parallèles.
Conclusion : $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas coplanaires.

EXERCICE 4 **8 points**
Commun à tous les candidats

$$f(x) = \ln(1+2x) \text{ sur } \left]-\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[.$$

I Première partie étude d'une fonction

1. Comme $1+2x > 0$ sur I, f est définie sur cet intervalle et est dérivable comme fonction composée de fonctions dérivables :
$f'(x) = \dfrac{2}{1+2x} > 0$. La fonction est donc croissante sur I.
2. **a.** Comme $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} (1+2x) = 0_+$, $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} f(x) = -\infty$.
   b. Sur I, $g(x) = f(x) - x$; g est dérivable comme différence de deux fonctions dérivables sur I et $g'(x) = f'(x) - 1 = \dfrac{2}{1+2x} - 1 = \dfrac{2-1-2x}{1+2x} = \dfrac{1-2x}{1+2x}$ qui est du signe de $1-2x$ puisque sur I, $1+2x > 0$.
   $1-2x = 0 \iff x = \dfrac{1}{2}$.
   Conclusion : g est croissante sur $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right]$ et décroissante sur $\left]\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right]$.
   c. On a $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ln 2 - \dfrac{1}{2} > 0$.
   Cherchons la limite de g au voisinage de $+\infty$:
   $g(x) = \ln(1+2x) - x = \ln x\left(2 + \dfrac{1}{x}\right) - x = \ln x + \ln\left(2+\dfrac{1}{x}\right) - x =$
   $x\left[\dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x} - 1\right]$.
   Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x} = 0$, la limite du crochet est donc égale à -1 et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
   Sur $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right]$, g est croissante de $-\infty$ à $\ln 2 - \dfrac{1}{2} > 0$. f étant continue sur cet intervalle il existe un réel unique α tel que $f(\alpha) = 0$. Il est évident que $\alpha = 0$.
   De même sur $\left]\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right]$, g décroit de $\ln 2 - \dfrac{1}{2} > 0$ à $-\infty$; g étant continue sur cet intervalle, il existe un réel unique β de cet intervalle tel que $g(\beta) = 0$.
   On vérifie que $g(1) \approx 0{,}098 > 0$ et que $g(2) \approx -0{,}39 < 0$.
   Conclusion : $1 < \beta < 2$.
   d. On en déduit le signe de g :
   — sur $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ 0\right[$, $g(x) < 0$
   — sur $]0\ ;\ \beta[$, $g(x) > 0$

— sur $]\beta\,;\,+\infty[$, $g(x) < 0$
— $g(0) = g(\beta) = 0$.

3. $0 < x < \beta \Rightarrow f(0) < f(x) < f(\beta)$ par croissance de la fonction f.
$f(0) = 0$ et $f(\beta) = g(\beta) + \beta = 0 + \beta = \beta$.
Conclusion : $0 < x < \beta \Rightarrow 0 < f(x) < \beta$.

II Étude d'une suite récurrente

1. *Initialisation* : on a $u_0 = 1 \in]0\,;\,\beta[$ (car $\beta > 1$). La propriété est vraie au rang 0;
Hérédité : soit un naturel n et supposons que $0 < u_n < \beta$.
Par croissance de la fonction f, on a $f(0) < f(u_n) < f(\beta)$ ou encore
$0 < u_{n+1} < \beta$. L'hérédité est établie.
L'encadrement est vrai au rang 0, et s'il est vrai au rang n il l'est aussi au rang $n+1$: on a donc montré par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n appartient à l'intervalle $]0\,;\,\beta[$.

2. *Initialisation* : on a $u_1 = f(u_0) = \ln 3 > 1$: la propriété est vraie au rang 1.
Hérédité : soit un naturel n tel que $n \geqslant 1$ et supposons que $u_{n+1} > u_n$ alors par croissance de la fonction f, $f(u_{n+1}) > f(u_n)$ soit $u_{n+2} > u_{n+1}$: l'hérédité est établie.
La relation est vraie au rang 1 et si elle est vraie au rang au moins égal à 1, elle l'est aussi au rang suivant; on a donc démontré par le principe de récurrence que la suite est croissante à partir du rang 1.

3. La suite est majorée par β et croissante : elle converge donc vers un nombre inférieur ou égal à β.

II Limite de la suite

1. On a vu que $f'(x) = \dfrac{2}{1+2x}$.
$x \geqslant 1 \Rightarrow 2x > 2 \Rightarrow 1+2x > 3 \Rightarrow \dfrac{1}{3} > \dfrac{1}{1+2x} \Rightarrow \dfrac{2}{3} > \dfrac{2}{1+2x}$.

2. a. (Hors-programme en 2009)
Puisque $f'(t) \leqslant \dfrac{2}{3}$, on sait que $\displaystyle\int_{u_n}^{\beta} f'(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \dfrac{2}{3}\left(\beta - u_n\right)$ et ce quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

b. Or $\displaystyle\int_{u_n}^{\beta} f'(t)\,\mathrm{d}t = \left[f(t)\right]_{u_n}^{\beta} = f(u_n) - f(\beta) = u_{n+1} - \beta$.
Donc d'après la question précédente : $u_{n+1} - \beta \leqslant \dfrac{2}{3}\left(\beta - u_n\right)$.

Par récurrence :
• *Initialisation* : pour $n = 0$, on a bien $0 \leqslant \beta - 1 \leqslant 1$. L'encadrement est vrai au rang 0.
• *Hérédité* : hypothèse de récurrence : supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait $0 \leqslant \beta - u_n \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$; on en déduit par produit par $\dfrac{2}{3}$:
$0 \leqslant \dfrac{2}{3}\left(\beta - u_n\right) \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}$. Or on a vu que $\beta - u_{n+1} \leqslant \dfrac{2}{3}\left(\beta - u_n\right)$; on en déduit donc que $0 \leqslant \beta - u_{n+1} \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}$.
L'encadrement est vrai au rang 0; et s'il est vrai au rang n, il est vrai au rang $n+1$. On a donc démontré par le principe de récurrence que pour tout naturel n :

$$0 \leqslant \beta - u_n \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n.$$

c. On sait car $0 < \dfrac{2}{3} < 1$ que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$, donc d'après le théorème des « gendarmes » : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \beta - u_n = 0$.

Conclusion : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = \beta$.