Corrigé du baccalauréat S Nouvelle Calédonie décembre 1999

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. On a $\overrightarrow{\text{AB}}\,(-3\,;\,-1\,;\,1)$ et $\overrightarrow{\text{AC}}\,(-2\,;\,-1\,;\,-1)$, donc $\overrightarrow{n}\,(2\,;\,-5\,;\,1)$ qui est donc un vecteur normal au plan (ABC).

   Une équation de ce plan est donc $2x-5y+z=d$ et en écrivant que A appartient à ce plan, on en déduit que $d=7$.

   $M(x\,;\,y\,;\,z)\in(\text{ABC}) \iff 2x-5y+z=7$.

2. On a d'abord $\overrightarrow{\text{DB}}\wedge\overrightarrow{\text{DC}}\,(2\,;\,-1\,;\,3)$, puis $\overrightarrow{\text{DA}}\wedge\left(\overrightarrow{\text{DB}}\wedge\overrightarrow{\text{DC}}\right)(16\,;\,-8\,;\,-8)$.

3. **a.** $\overrightarrow{\text{D}M}=t\overrightarrow{n}$ se traduit par le système :

   $$\left\{\begin{array}{lcl} x-1 & = & 2t\\ y-1 & = & -5t\\ z+2 & = & t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+2t\\ y & = & 1-5t\\ z & = & -2+t\end{array}\right. \quad \text{avec } t\in\mathbb{R}.$$

   b. $M(x\,;\,y\,;\,z)\in(\text{ABC})\cap\left(\text{D},\,\overrightarrow{n}\right)\iff$

   $$\left\{\begin{array}{lcl} 2x-5y+z & = & 7\\ x & = & 1+2t\\ y & = & 1-5t\\ z & = & -2+t\end{array}\right. \Rightarrow 2(1+2t)-5(1-5t)-2+t=7 \iff$$

   $$2+4t-5+25t-2+t=7 \iff 30t=5 \iff t=\frac{1}{6}.$$

   En remplaçant dans les trois dernières équations t par $\frac{1}{6}$, on obtient : $\text{H}\left(\frac{4}{3}\,;\,\frac{1}{6}\,;\,-\frac{11}{6}\right)$.

   c. On a $\text{DH}^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{5}{6}\right)^2+\left(-\frac{23}{6}\right)^2=\frac{4+25+529}{36}=\frac{558}{36}$.

   Donc $\text{DH}=\sqrt{\frac{558}{36}}=\frac{3\sqrt{62}}{6}=\frac{\sqrt{62}}{2}$.

4. Si D′ est le symétrique du point D par rapport au plan ABC, c'est aussi le symétrique de D autour du point H, donc H est le milieu de [DD′]. Si $(x\,;\,y\,;\,z)$ sont les coordonnées de D′, on a donc :

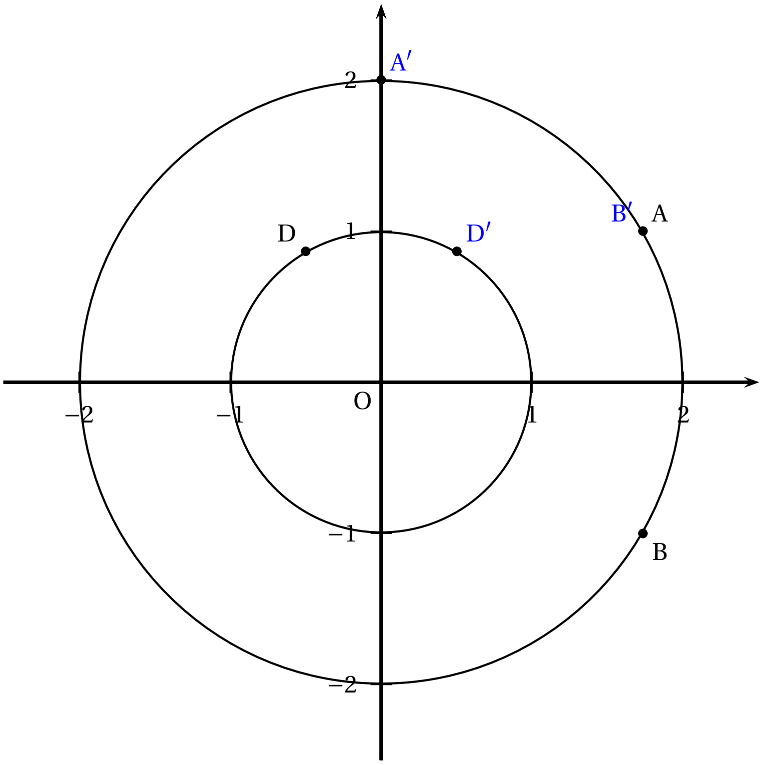
   $$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{1+x}{2} & = & \frac{4}{3}\\ \frac{1+y}{2} & = & \frac{1}{6}\\ \frac{-2+z}{2} & = & -\frac{11}{6}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 1+x & = & \frac{8}{3}\\ 1+y & = & \frac{1}{3}\\ -2+z & = & -\frac{11}{3}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{5}{3}\\ y & = & -\frac{2}{3}\\ z & = & -\frac{5}{3}\end{array}\right.$$

   On a donc $\text{D}'\left(\frac{5}{3}\,;\,-\frac{2}{3}\,;\,-\frac{5}{3}\right)$.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

1.



2. **a.** La rotation R a pour écriture complexe : $z' = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}z = \left(\cos\frac{\pi}{3} + \text{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \text{i}\frac{1}{2}\right)z$.

   On a donc $z_{\text{A}'} = \left(\sqrt{3} + \text{i}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \text{i}\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} + \text{i}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) = 2\text{i}$.

   De même $z_{\text{B}'} = \left(\sqrt{3} - \text{i}\right)\left(\frac{\frac{1}{2} + \text{i}\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \text{i}\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) = \sqrt{3} + \text{i} = z_{\text{A}}$.

   b. La translation a pour écriture complexe : $z' = z + 1$. Donc

   $z_{\text{D}'} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{i} + 1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{i}$.

   c. Voir la figure ci-dessus.

3. $$\frac{z_{\text{A}'} - z_{\text{B}'}}{z_{\text{D}'}} = \frac{2\text{i} - \sqrt{3} - \text{i}}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\text{i}} = \frac{-\sqrt{3} + \text{i}}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\text{i}} = \frac{2\left(-\sqrt{3} + \text{i}\right)}{1 + \text{i}\sqrt{3}} = \frac{2\left(-\sqrt{3} + \text{i}\right)\left(1 - \text{i}\sqrt{3}\right)}{\left(1 + \text{i}\sqrt{3}\right)\left(1 - \text{i}\sqrt{3}\right)}$$

   $$\frac{z_{\text{A}'} - z_{\text{B}'}}{z_{\text{D}'}} = \frac{2\left(-\sqrt{3} + \text{i} + 3\text{i}\sqrt{3}\right)}{1 + 3} = \frac{8\text{i}}{4} = 2\text{i}.$$

   Géométriquement ce résultat signifie que $\left(\overrightarrow{\text{OD}'}, \overrightarrow{\text{B}'\text{A}'}\right) = \dfrac{\pi}{2}$, autrement dit la droite (OD′) est perpendiculaire à la droite (B′A′).

   Or $\left|z_{\text{B}'}\right| = 2$ et $\left|z_{\text{A}'}\right| = 2$: le triangle (OA′B′) est donc isocèle et la droite (OD′) issue du sommet principal est hauteur et par conséquent médiatrice du côté opposé [B′A′].

Exercice 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

1. **a.** $N = 9n + 1 = 9 \times 2p + 1 = 2 \times (9p) + 1$: c'est un multiple de 2 plus 1 : il est impair ; de même $M = 9n - 1 = 9 \times 2p - 1 = 2 \times (9p) - 1$; c'est un multiple de 2 moins 1 : il est impair.

   b. De façon évidente $N - M = 9n + 1 - 9n + 1 = 2$; or $N - M = 2 \iff N = M + 2$. N et M sont donc deux naturels impairs consécutifs : ils sont premiers entre eux.

2. a. $N = 9n+1 = 9(2p+1)+1 = 2\times 9p+9+1 = 2\times 9p+10 = 2(9p+5)$: N est donc pair.
De même $M = 9n-1 = 9\times(2p+1)-1 = 2\times 9p+8 = 2(9p+4)$: M est pair.
b. On a déjà vu que $N = M+2$; PGCD$(M\,;\tilde{N})$ = PGCD$[2(9p+5)\ ;\ 2(9p+4)]$ = 2PGCD$(9p+5\ ;\ 9p+4) = 2$, puisque PGCD$(9p+5\ ;\ 9p+4) = 1$ car les entiers sont consécutifs.
3. a. $81n^2-1 = (9n+1)(9n-1) = N\times M$.
b. On a vu à la question 1. que M et N sont impairs donc leur produit l'est aussi : $81n^2-1$ est impair.
c. On a vu à la question 2. que si n est impair, alors M et N sont pairs. Leur produit est donc pair et même multiple de 4puisque $MN = 2(9p+5)\times(9p+4) = 4(9p+4)(9p+5)$: on peut même préciser que MN est le produit de 4 par deux naturels consécutifs.
Exemple : avec $n = 11$, $N = 100$, $M = 98$, donc $N\times M = 100\times 98 =$
$2\times 50\times 2\times 49 = 4\times 49\times 50$.
Inversement si $81n^2-1$ est multiple de 4, il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $81n^2-1 = 4p$ soit $(9n+1)(9n-1) = 4p$.
Si n est pair $9n+1$ et $9n-1$ sont impairs et leur produit aussi : c'est impossible, donc n est impair.
Conclusion : $81n^2-1$ est divisible par 4 si et seulement si n est impair.

PROBLÈME **11 points**
Commun à tous les candidats

Partie A - Résolution d'une équation différentielle
On considère l'équation différentielle :

$$y'-2y = \mathrm{e}^{2x},\quad (\mathrm{E}).$$

1. $u(x) = x\mathrm{e}^{2x}$est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = \mathrm{e}^{2x}+2x\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x}(1+2x)$.
Donc $u'(x)-2u(x) = \mathrm{e}^{2x}(1+2x)-2x\mathrm{e}^{2x} = 2x\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{2x}-2x\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x}$.
La fonction u est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
2. $y'-2y = 0 \iff t' = 2y \iff \dfrac{y'}{y} = 2 \iff \ln|y| = 2x+K \iff y = K'\mathrm{e}^{2x}$. (avec $K\in\mathbb{R}$)
3. v solution de (E) si et seulement si $v'-2v = \mathrm{e}^{2x}$.
Or on a vu que $u'-2u = \mathrm{e}^{2x}$, donc par différence $v'-u'-2(v-u) = 0$, c'est-à-dire que la fonction $v-u$ est solution de l'équation homogène (E_0).
In versement si $v-u$ est solution de (E_0), alors
$v'-u'-2(v-u) = 0$, soit $v'-\mathrm{e}^{2x}(1+2x)-2v+2x\mathrm{e}^{2x} = 0 \iff v'-2v = \mathrm{e}^{2x}$ ce qui signifie que v est solution de (E).
4. On a donc $v-u$ est solution de (E_0) signifie que $v-x\mathrm{e}^{2x} = K'\mathrm{e}^{2x}$, soit
$v(x) = \left(K'+x)K'\right)\mathrm{e}^{2x}$, avec $K'\in\mathbb{R}$.
5. On a $v(0) = \left(K'+0)\mathrm{e}^{2\times 0}\right) = K' = 1$.
Conclusion $v(x) = (x+1)\mathrm{e}^{2x}$.

Partie B - Étude d'une fonction

1. On a
   - $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x+1) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{2x} = +\infty$, donc par produit de limites :
   $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x) = +\infty$.

- $f(x) = x\text{e}^{2x} + \text{e}^{2x}$.

Or $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \text{e}^{2x} = \lim_{x\to-\infty} x\text{e}^{2x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ (l'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ au voisinage de moins l'infini).

2. La fonction f est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc sur cet intervalle :

$f'(x) = \text{e}^{2x} + 2(x+1)\text{e}^{2x} = \text{e}^{2x}(1+2x+2) = (2x+3)\text{e}^{2x}$. On sait que quel que soit le réel x, $\text{e}^{2x} > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $2x+3$.

$2x+3 > 0 \iff x > -\dfrac{3}{2}$: la fonction f est croissante sur $\left]-\dfrac{3}{2}\ ;\ +\infty\right[$;

$2x+3 < 0 \iff x < -\dfrac{3}{2}$: la fonction f est décroissante sur $\left]-\infty\ ;\ -\dfrac{3}{2}\right[$;

$2x+3 = 0 \iff x = -\dfrac{3}{2}$: il y a un extremum (minimum) en $-\dfrac{3}{2}$ égal à

$f\left(-\dfrac{3}{2}\right) = \left(1-\frac{3}{2}\right)\text{e}^{2\times\left(-\frac{3}{2}\right)} = -\frac{1}{2}\text{e}^{-3} = -\dfrac{1}{2\text{e}^3}$.

Le signe de $f(x)$ est celui de $x+1$, donc f est positive sur $]-1\ ;\ +\infty[$ et négative sur $]-\infty\ ;\ -1[$.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		-1		$+\infty$
$f'(x)$							
$f(x)$	0	↘	$-\dfrac{1}{2\text{e}^3}$	↗	0	↗	$+\infty$

3. a. D'après le tableau de variations précédent la fonction f est négative sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ -1[$. Donc l'aire de la surface $\mathcal{D}$ est égale (en unités d'aire) à l'opposée de l'intégrale :

$$\int_{\alpha}^{-1} f(x)\,\text{d}x.$$

En posant $u(x) = x+1$ et $v'(x) = \text{e}^{2x}$, on obtient :

$u'(x) = 1$ et $v(x) = \dfrac{1}{2}\text{e}^{2x}$.

Toutes ces fonctions étant continues car dérivables sur $\mathbb{R}$, on peut donc intégrer par parties :

$\displaystyle\int_{\alpha}^{-1} f(x)\text{d}x = \left[(x+1)\times\frac{1}{2}\text{e}^{2x}\right]_{\alpha} -1-\int_{\alpha}^{-1} \text{e}^{2x}\text{d}x = \left[(x+1)\times\frac{1}{2}\text{e}^{2x} - \frac{1}{2}\text{e}^{2x}\right]_{\alpha}^{-1} =$

$\displaystyle\left[\frac{x}{2}\text{e}^{2x}\right]_{\alpha}^{-1} = \frac{-1}{2}\text{e}^{2\times(-1)} - \frac{\alpha}{2}\text{e}^{2\alpha}$.

Donc $\mathcal{D}(\alpha) = \dfrac{\alpha}{2}\text{e}^{2\alpha} + \dfrac{1}{2}\text{e}^{-2}$.

b. On sait que $\displaystyle\lim_{\alpha\to-\infty} \frac{\alpha}{2}\text{e}^{2\alpha} = 0$, donc :

$$\lim_{\alpha\to-\infty} \mathcal{D}(\alpha) = \frac{\text{e}^{-2}}{2} \approx 0,068 \text{ (u. a.)}$$

Partie C - Résolution d'une équation

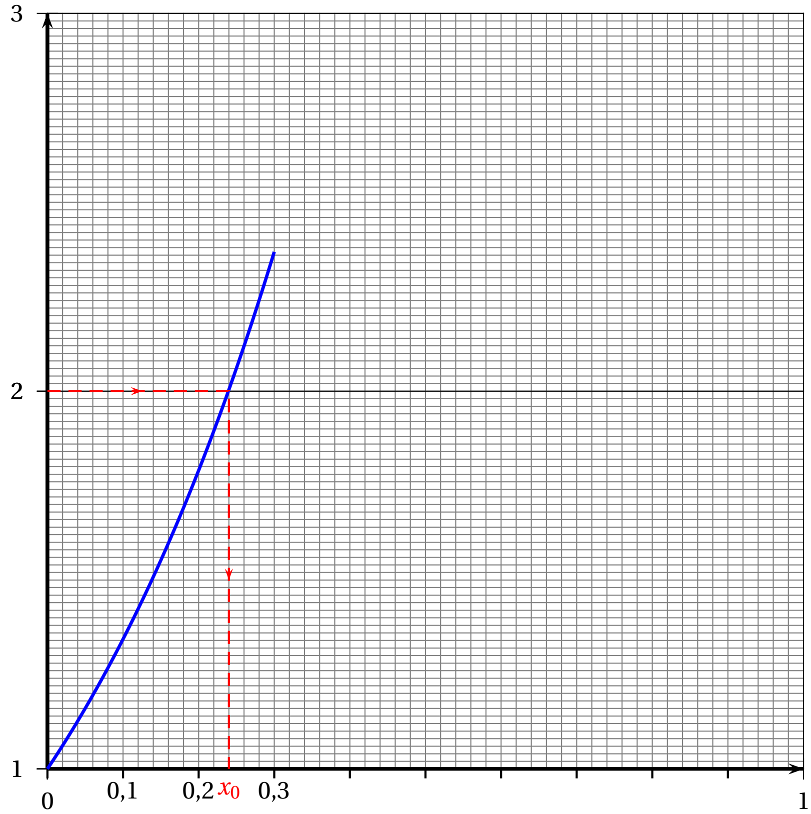
1. Sur l'intervalle $[-1\ ;\ +\infty[$, la fonction f est continue car dérivable et croît de zéro à plus l'infini ; d'après le théorème de la bijection il existe donc un réel unique $x_0 \in]-1\ ;\ +\infty[$ tel que $f(x_0) = 2$.

La calculatrice donne $f(0,2) \approx 1,79$ et $f(0,3) \approx 2,37$, donc $x_0 \in]0,2\ ;\ 0,3[$.

2.

x	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3
$f(x)$	1,16	1,34	1,55	1,79	2,06	2,37

3.



On a $f(x_0) = 2 \iff (x_0+1)\,\mathrm{e}^{2x_0} = 2 \iff \ln(x_0+1) + 2x_0 = \ln 2 \iff$
$2x_0 = \ln 2 - \ln(x_0+1) \iff 2x_0 = \ln\left(\dfrac{2}{x_0+1}\right) \iff x_0 = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{2}{x_0+1}\right)$.

Partie D - Approximation de x_0

1. a. $0,2 \leqslant x \leqslant 0,3 \Rightarrow 1,2 \leqslant x+1 \leqslant 1,3 \Rightarrow \dfrac{1}{1,3} \leqslant \dfrac{1}{x+1} \leqslant \dfrac{1}{1,2} \Rightarrow \dfrac{2}{1,3} \leqslant \dfrac{2}{x+1} \leqslant \dfrac{2}{1,2} \Rightarrow \ln\dfrac{2}{1,3} \leqslant \ln\dfrac{2}{x+1} \leqslant \ln\dfrac{2}{1,2} \Rightarrow \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{2}{1,3} \leqslant \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{2}{x+1} \leqslant \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{2}{1,2} \Rightarrow \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{2}{1,3} \leqslant h(x) \leqslant \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{2}{1,2}$.

Or $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{2}{1,3} > 0,21$ et $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{2}{1,2} < 0,255$, donc $h(x) \in [0,2\,;\,0,3]$.

b. Pour $x \in [0,2\,;\,0,3]$, $h'(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{u'(x)}{u(x)}$, avec $u(x) = \dfrac{2}{x+1}$, soit $u'(x) = -\dfrac{2}{(x+1)^2}$.

Donc $h'(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{-\frac{2}{(x+1)^2}}{\frac{2}{x+1}} = -\dfrac{1}{2(x+1)}$.

D'où $0,2 \leqslant x \leqslant 0,3 \Rightarrow 1,2 \leqslant x+1 \leqslant 1,3 \Rightarrow 2,4 \leqslant 2(x+1) \leqslant 2,6 \Rightarrow \dfrac{1}{2,6} \leqslant \dfrac{1}{2(x+1)} \leqslant \dfrac{1}{2,4}$.

Or $\dfrac{1}{2,6} > 0,38$ et $\dfrac{1}{2,4} < 0,406$.

On en déduit que sur I, $|h'(x)| \leqslant 0,42$.

2.

a. On a $|u_{n+1} - x_0| = |h(u_n) - h(x_0)|$; en appliquant l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $[u_n\ ;\ x_0]$, on obtient avec la majoration du nombre dérivé :

$|h(u_n) - h(x_0)| \leqslant 0,42\,|u_n - x_0|$, soit $|u_{n+1} - x_0| \leqslant 0,42|u_n - x_0|$.

Démonstration par récurrence :

- *Initialisation* :

$u_0 = 0,2$, et $0,2 \leqslant x_0 \leqslant 0,3$, donc $|u_0 - x_0| < 0,1$.

Donc d'après la relation démontrée dans la question précédente :

$|u_1 - x_0| \leqslant 0,42 \times 0,1$.

- *Hérédité* :

Supposons que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\left|u_p - x_0\right| \leqslant 0,1 \times (0,42)^p$.

D'après la relation démontré dans la question précédente :

$\left|u_{p+1} - x_0\right| \leqslant 0,42\left|u_p - x_0\right| \leqslant 0,42 \times 0,1 \times (0,42)^p$, soit

$\left|u_{p+1} - x_0\right| \leqslant 0,1 \times 0,42^{p+1}$: l'hérédité est démontrée.

Conclusion : la relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie à un rang quelconque elle l'est au rang suivant : on a donc démontré par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $|u_n - x_0| \leqslant 0,1 \times (0,42)^n$.

b. Comme $0,42 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,42^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - x_0| = 0$ ce qui signifie que la limite de la suite (u_n) est x_0.

c. D'après la question précédente il faut trouver un entier p tel que :

$0,1 \times (0,42)^p < 10^{-5} \iff 0,42^p < 10^{-4} \iff p\ln 0,42 < -4\ln 10 \iff$

$p > \dfrac{-4\ln 10}{\ln 0,42} \approx 10,6$. Il faut prendre $p \geqslant 11$.

d. On obtient $u_{11} \approx 0{,}239\,296$, donc $\beta = 0{,}239\,30$. On obtient :

$f(\beta) \approx 1{,}999\,999\,04$;

$f\left(\beta + 10^{-5}\right) \approx 2{,}000\,055$.

On a donc $f(\beta) < 2 < f\left(\beta + 10^{-5}\right)$, donc la valeur décimale approchée par défaut de x_0 à 10^{-5} près est $0{,}239\,30$.