Corrigé du baccalauréat S Nouvelle–Calédonie mars 2003

Exercice 1 **5 points**

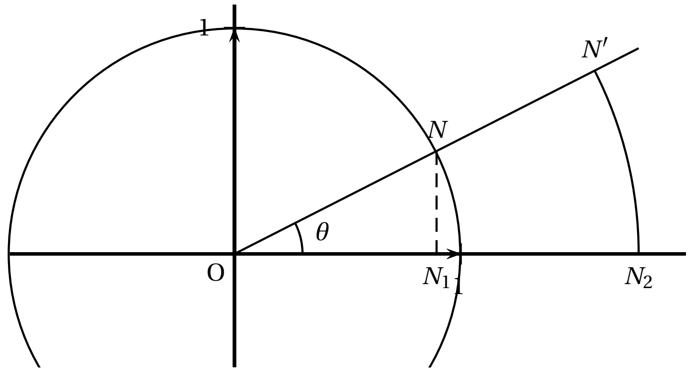
$$z' = z^2 + 1.$$

1. Trouver les antécédents de O revient à résoudre l'équation :
$z' = 0 = z^2 + 1 \iff z^2 = -1$; les solutions sont i et $-$i.
Les points d'affixe i et $-$i ont pour image le point O.
2. Un point $M(z)$ est invariant si son affixe vérifie :
$z' = z = z^2 + 1 \iff z^2 - z + 1 = 0 \iff \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = 0 \iff$
$\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0 \iff \left(z - \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z - \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$
Les deux solutions sont $\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. Comme $z^2 = (-z)^2$, deux points symétriques autour de O d'affixe z et $-z$) ont la même image.
4. $z_{\mathrm{A}'} = z_{\mathrm{A}}^2 + 1 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})\right)^2 + 1 = \dfrac{1}{2}(1+\mathrm{i})^2 + 1 = \dfrac{1}{2}(1 - 1 + 2\mathrm{i}) + 1 = 1 + \mathrm{i}.$
$z_{\mathrm{A}'} = 1 + \mathrm{i}.$
On a bien sûr $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}'}$, ce qui montre que les points 0, A et A$'$ sont alignés.
5. **a.** On a $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right|^2 = |\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta|^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, donc $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right| = 1$ ce qui montre que tout point N appartient au cercle unitaire.

   b. Si N a pour affixe $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, alors son image N' a pour affixe :
   $z' = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^2 + 1 \iff z' - 1 = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^2.$
   Il en résulte en prenant les modules de chaque membre :
   $\left|z' - 1\right| = \left|\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^2\right| = 1^2 = 1.$
   Donc $\left|z' - 1\right| = 1$ égalité qui montre que le point N' appartient au cercle centré au point d'affixe 1, de rayon 1.

   c. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{O}N'}$ est :
   $z' = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^2 + 1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta + \cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta) = 2\cos\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 2\cos\theta z.$
   On a donc $\overrightarrow{\mathrm{O}N'} = 2\cos\theta\overrightarrow{\mathrm{O}N}$ ce qui montre que les points O, N et N' sont alignés.

   d. Pour un point N qui correspond à un argument θ, on projette ce point orthogonalement sur l'axe des abscisses en N_1 ; la distance de ce projeté à O est égale à $\cos\theta$, longueur que l'on double sur l'axe des abscisses pour obtenir le point N_2 ; le cercle de rayon ON_2 coupe la droite (ON) en N'



Exercice 2 5 points

Une société de maintenance de photocopieurs désire optimiser ses prestations au niveau des entreprises, afin de proposer un abonnement adapté à ses services.
On note, pour n entier naturel non nul, I_n l'évènement « La société intervient durant le n-ième mois qui suit l'installation d'un photocopieur » et $p_n = p(I_n)$ la probabilité de l'évènement I_n.
Le bureau d'étude a mis en évidence les résultats suivants pour une entreprise déterminée :

- $p\left(I_1\right) = p_1 = 0,75$.
- Sachant qu'il y a eu une intervention durant le n-ième mois qui suit l'installation d'un photocopieur, la probabilité d'intervention le mois suivant est égale à $0,04$.
- Sachant qu'iI n'y a pas eu d'intervention durant le n-ième mois qui suit l'installation d'un photocopieur, la probabilité d'intervention le mois suivant est égale à $0,64$.

On rappelle que $\overline{\text{A}}$ est l'évènement contraire de l'évènement A et que $p_{\text{B}}(\text{A})$ est la probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé.

Partie 1

1. D'après l'énoncé :
   - $p_{I_n}\left(I_{n+1}\right) = 0,04$;
   - $p_{\overline{I_n}}\left(I_{n+1}\right) = 0,64$;
   - $p\left(I_{n+1} \cap I_n\right) = p_{I_n} \times p_{I_n}\left(I_{n+1}\right) = p_n \times 0,04$;
   - $p\left(I_{n+1} \cap \overline{I_n}\right) = p\left(\overline{I_n}\right) \times p_{\overline{I_n}}\left(I_{n+1}\right) = \left(1 - p_n\right) \times 0,64 = 0,64\left(1 - p_n\right)$.
2. D'après la loi des probabilités totales :
   $p_{n+1} = p\left(I_{n+1}\right) = p\left(I_{n+1} \cap I_n\right) + p\left(I_{n+1} \cap \overline{I_n}\right) = 0,04p_n + 0,64\left(1 - p_n\right) =$
   $0,04p_n + 0,64 - 0,64p_n = 0,64 - 0,6p_n$.
3. On considère la suite $\left(q_n\right)$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $q_n = p_n - 0,4$.

   a. Pour $n > 0$, $q_{n+1} = p_{n+1} - 0,4 = 0,64 - 0,6p_n - 0,4 = 0,24 - 0,6p_n =$
   $0,6\left(0,4 - p_n\right) = 0,6q_n$.
   La relation $q_{n+1} = 0,6q_n$, montre que la suite $\left(q_n\right)$ est une suite géométrique de raison 0,6 de premier terme $q_1 = p_1 - 0,4 = 0,75 - 0,4 = 0,35$.

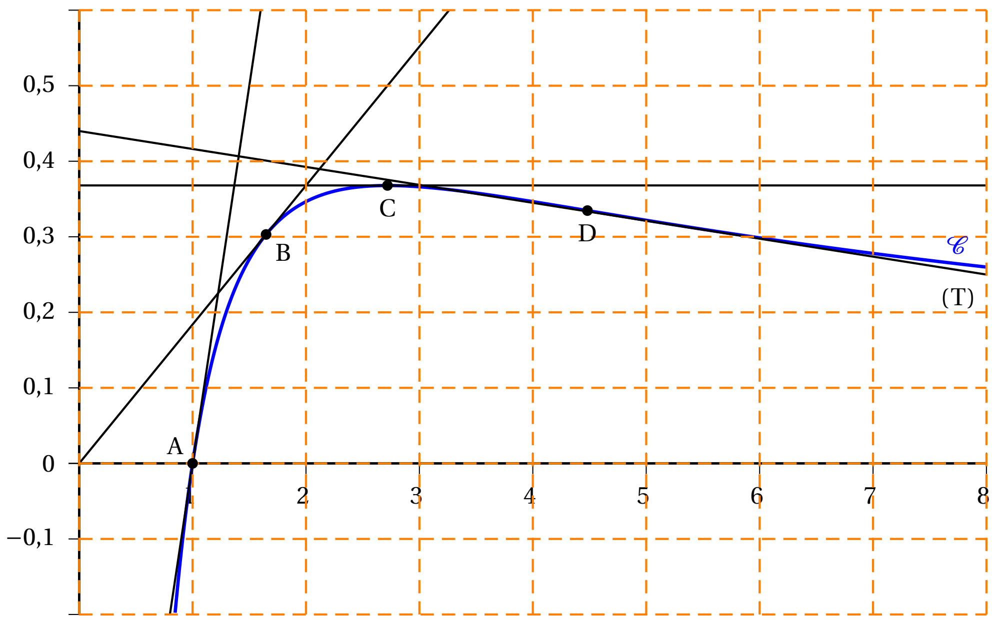
   b. On sait que pour $n > 0$, $q_n = q_1 \times r^{n-1} = 0,35 \times 0,6^{n-1}$.
   Or $q_n = p_n - 0,4 \iff p_n = q_n + 0,4 = 0,4 + 0,35 \times 0,6^{n-1}$.

   c. On a donc $p_6 = 0,4 + 0,35 \times 0,6^{n-1} = 0,4 + 0,35 \times 0,6^5 = 0,427216$, soit 0,427 au millième près.

Partie 2

Soit X la variable égale au nombre de déplacements au cours du mois; on peut considérer que cette variable suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et
$p = 0,373$.
La probabilité qu'au cours de ce mois il n'y ait aucune intervention est égale à
$(1 - 0,373)^{10} = 0,627^{10}$.
La probabilité qu'il y ait au moins un déplacement du service de maintenance durant ce mois est donc égale à $1 - 0,627^{10} \approx 0,9906$, soit 0,991 à 10^{-3} près par excès.

Problème **10 points**



PARTIE I

1. **a.** On lit $f'(1) \approx 1$; $f'(\text{e}) \approx \frac{0,3}{\sqrt{\text{e}}} \approx 0,2$; $f'(\text{e}) = 0$; $f\left(\text{e}\sqrt{\text{e}}\right) \approx -\frac{0,05}{3,5} \approx -0,01$.

   b. $\mathscr{C}$ admet une seule tangente horizontale au point d'abscisse e ; une seule tangente de coefficient directeur 1 au point d'abscisse 1.

   c. Le seul tableau possible est le premier : la fonction est croissante puis décroissante.

2.

$$g(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

   a. Comme $x > 0$, la fonction g est dérivable et

   $g'(x) = \dfrac{-\frac{1}{x} \times x^2 - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \dfrac{-x - 2x + 2x\ln x}{x^4} = \dfrac{2\ln x - 3}{x^3}$.

   Comme $x^3 > 0$, $g'(x)$ est du signe de $2\ln x - 3$.

   - $2\ln x - 3 > 0 \iff 2\ln x > 3 \iff \ln x > \frac{3}{2} \iff x > \text{e}^{\frac{3}{2}}$;
   - $2\ln x - 3 < 0 \iff 2\ln x < 3 \iff \ln x < \frac{3}{2} \iff x < \text{e}^{\frac{3}{2}}$;
   - $2\ln x - 3 = 0 \iff 2\ln x = 3 \iff \ln x = \frac{3}{2} \iff x = \text{e}^{\frac{3}{2}}$.

   $\text{e}^{\frac{3}{2}} = \text{e}^{1+\frac{1}{2}} = \text{e} \times \text{e}^{\frac{1}{2}} = \text{e}\sqrt{e}$.

   Conclusion : la fonction g est décroissante sur $\left]0\ ;\ \text{e}^{\frac{1}{2}}\right[$ et croissante sur $\left]\text{e}^{\frac{1}{2}}\ ;\ +\infty\right[$.

   b.
   - Limite en $0 = \lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 0} 1 - \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = +\infty$;
   - Limite en $+\infty$: $g(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\ln x}{x^2}$.

   $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2}$ et l'on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$, d'où par somme de limites $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

   c. $g(1) = \dfrac{1 - 0}{1^2} = 1$;

   $g\left(\text{e}\sqrt{\text{e}}\right) = \dfrac{1 - \ln \text{e}\sqrt{e}}{\left(\text{e}\sqrt{\text{e}}\right)^2} = \dfrac{1 - \frac{3}{2}}{\text{e}^3} = -\dfrac{1}{2\text{e}^3}$.

   On a vu que g est croissante sur $\left]0\ ;\ \text{e}^{\frac{1}{2}}\right[$ et croissante sur $\left]\text{e}^{\frac{1}{2}}\ ;\ +\infty\right[$; comme $g(1) = 1$ et $g\left(\text{e}\sqrt{\text{e}}\right) < 0$, il n'existe qu'une seule solution à l'équation $g(x) = 1$. (résultat vu sur le graphe à la question 1. b.)

d. g est la dérivée de f et comme $f(1) = 0$, f est l'intégrale de sa dérivée g sur l'intervalle $[1~;~x]$, d'où :

$$f(x) = \int_1^x \left(\frac{1 - \ln t}{t^2}\right) \mathrm{d}t.$$

Avec $u(t) = 1 - \ln t$ et $dv = \dfrac{1}{t^2}$, on a :

$du = -\dfrac{1}{t}$ et $v = -\dfrac{1}{t}$, d'où en intégrant par parties toutes les fonctions étant continues car dérivables pour $x \geqslant 1$:

$f(x) = \left[-\dfrac{1 - \ln t}{t}\right]_1^x - \displaystyle\int_1^x \dfrac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\dfrac{1 - \ln t}{t}\right]_1^x + \left[\dfrac{1}{t}\right]_1^x = \left[\dfrac{\ln t}{t}\right]_1^x = \dfrac{\ln x}{x}.$

$f(x) = \dfrac{\ln x}{x}.$

Partie II

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

1. On a vu que $g(x) = f'(x)$:

- $g(x) > 0 \iff 1 - \ln x > 0 \iff \ln x < 1 \iff x < \mathrm{e}$;
- $g(x) < 0 \iff 1 - \ln x < 0 \iff \ln x > 1 \iff x > \mathrm{e}$;
- $g(x) = 0 \iff 1 - \ln x = 0 \iff \ln x = 1 \iff x = \mathrm{e}$

La fonction f est donc croissante sur $]0~;~\mathrm{e}[$ et décroissante sur $]\mathrm{e}~;~+\infty[$.

- Limite en 0 : comme $\displaystyle\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$, on a $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$.
- Limite en $+\infty$:on sait $\displaystyle\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

2. • Tangente(s) horizontale(s) : il y a une tangente horizontale si

$f'(x) = g(x) = 0 \iff \dfrac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \iff 1 - \ln x = 0 \iff \ln x = 1 \iff x = \mathrm{e}$: il y a une seule tangente horizontale, celle au point d'abscisse e.

• Tangente(s) de coefficient directeur égal à 1 : il faut que

$f'(x) = g(x) = 1 \iff \dfrac{1 - \ln x}{x^2} = 1 \iff 1 - \ln x = x^2 \iff x^2 + \ln x - 1 = 0.$

Soit, pour $x > 0$, $u(x) = x^2 + \ln x - 1$, on a $u'(x) = 2x + \dfrac{1}{x} > 0$, car somme de deux termes positifs. u est donc croissante de $-\infty$ à $+\infty$ et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique α tel que $u(\alpha) = 0 = \alpha^2 + \ln \alpha - 1 = 0$. Ce nombre est bien sûr 1. $(1^2 + \ln 1 - 1 = 0)$

• Tangente(s) contenant l'origine : une équation de la tangente (T) à $\mathscr{C}$ en un point de coordonnées $(x~;~f(x))$ est :

$M(X~;~Y) \in (T) \iff Y - f(x) = f'(x)(X - x) \iff$

$Y - \dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}(X - x) \iff Y = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}(X - x) + \dfrac{\ln x}{x} \iff$

$Y = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}X - \dfrac{1 - \ln x}{x} + \dfrac{\ln x}{x} \iff Y = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}X + \dfrac{2\ln x - 1}{x}.$

Cette droite contient l'origine s'il existe un réel x tel que $\dfrac{2\ln x - 1}{x} = 0 \iff$

$2\ln x - 1 = 0 \iff 2\ln x = 1 \iff \ln x = \frac{1}{2} \iff x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}}.$

La tangente au point d'abscisse $\sqrt{\mathrm{e}}$ est la seule qui contienne l'origine.

3. Étude de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point D (le point D a pour abscisse $\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}$).

a. $M(x\,;\,y) \in (\mathrm{T}) \iff y - f\left(\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}\right) = f'\left(\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}\right)(x - \mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}) \iff y - \dfrac{\ln\left(\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}\right)}{\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}} =$

$\dfrac{1-\ln \mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}}{\left(\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}\right)^2}(x-\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}) \iff y = \dfrac{\frac{3}{2}}{\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}} + \dfrac{1-\frac{3}{2}}{\mathrm{e}^3}\left(x-\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}\right) \iff$

$y = \dfrac{3}{2\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}} - \dfrac{1}{2\mathrm{e}^3}\left(x-\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}\right) \iff y = \dfrac{3}{2\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}} - \dfrac{1}{2\mathrm{e}^3}x + \dfrac{1}{2\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}}$

$$y = \dfrac{-x+4\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}}{2\mathrm{e}^3}.$$

b. Soit la fonction d définie pour $x > 0$ par :
$d(x) = \dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{-x+4\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}}{2\mathrm{e}^3} = \dfrac{2\mathrm{e}^3\ln x + x^2 - 4x\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}}{2x\mathrm{e}^3}$ qui est du signe du numérateur car $2x\mathrm{e}^3 > 0$.

$d(x) > 0$, autrement dit la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de la tangente (T) si $2\mathrm{e}^3\ln x + x^2 - 4x\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}} > 0$;

$d(x) < 0$, autrement dit la courbe $\mathscr{C}$ est au dessous de la tangente (T) si $2\mathrm{e}^3\ln x + x^2 - 4x\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}} < 0$.

c.

$$\varphi(x) = 2\mathrm{e}^3\ln x + x^2 - 4\mathrm{e}x\sqrt{\mathrm{e}}.$$

Sur $\mathbb{R}_+^*$, φ est dérivable et sur cet intervalle :

$\varphi'(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^3}{x} + 2x - 4\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}.$

$\varphi''(x) = -\dfrac{2\mathrm{e}^3}{x^2} + 2.$

$\varphi''(x) \geqslant 0 \iff -\dfrac{2\mathrm{e}^3}{x^2} + 2 \geqslant 0 \iff 2 \geqslant \dfrac{2\mathrm{e}^3}{x^2} \iff x^2 \geqslant \mathrm{e}^3 \iff x \leqslant -\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$ ou $x \geqslant \mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$, c'est-à-dire$x \geqslant \mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$ ou encore x $\geqslant \mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}$.

De même $\varphi''(x) \leqslant 0 \iff 0 < x \leqslant \mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}$.

Donc φ' est décroissante sur $]0\,;\,\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}[$ et croissante sur $]\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}\,;\,+\infty[$.

$\varphi'\left(\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}\right)$ est donc le minimum de φ'.

$\varphi'\left(\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}\right) = \dfrac{2\mathrm{e}^3}{\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}} + 2\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}} - 4\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}} = 2\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}} + 2\mathrm{e} - 4\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}\sqrt{\mathrm{e}} = 0.$

Le minimum étant 0, on peut en conclure que $\varphi'(x) \geqslant 0$: la fonction φ est donc croissante et on a :

$\varphi\left(\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}\right) = 2\mathrm{e}^3\ln\left(\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}\right) + \left(\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}\right)^2 - 4\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}} \times \mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}} = 3\mathrm{e}^3 + \mathrm{e}^3 - 4\mathrm{e}^3 = 0$

Conclusion :

- sur $]0\,;\,\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}[$, $\varphi(x) \leqslant 0$ ou $d(x) \leqslant 0$: la courbe $\mathscr{C}$ est sous la droite (T) ;
- sur $]\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}\,;\,+\infty[$, $\varphi(x) \geqslant 0$ ou $d(x) \geqslant 0$: la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de la droite (T).

Partie III Calcul d'aires

1. 1, $\sqrt{\mathrm{e}}$ et e sont les trois premiers termes d'une suite géométrique de raison $\sqrt{\mathrm{e}}$.

Le terme suivant est e $\times \sqrt{\mathrm{e}}$ qui est bien l'abscisse de D.

2. a. On a $U_1 = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \dfrac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x.$

En posant $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$, on a :

$u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = \ln x$.

Toutes ces fonctions sont continues car dérivables pour $x \geqslant 1$, donc on peut intégrer par parties :

$\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = (\ln x)^2 - \int \frac{\ln x}{x}$; d'où $2\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = (\ln x)^2$ et donc
$\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\ln x)^2$.
Donc $U_1 = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}$.
$U_2 = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_{\sqrt{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}} = \frac{1}{2}\left(\ln \mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\ln\sqrt{\mathrm{e}}\right)^2 = \frac{9}{8} - \frac{1}{8} = 1$.

b. La suite arithmétique a pour raison $\frac{1}{2}$. On doit donc avoir $U_3 = \frac{3}{2}$ soit :
$\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{x_0} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_{\mathrm{e}}^{x_0} = \frac{1}{2}(\ln x_0)^2 - \frac{1}{2}(\ln \mathrm{e})^2 = \frac{3}{2} \iff$
$\frac{1}{2}(\ln x_0)^2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \iff (\ln x_0)^2 = 4 \iff \ln x_0 = 2 \iff x_0 = \mathrm{e}^2$.