Corrigé du baccalauréat S Nouvelle-Calédonie novembre 2002

Exercice 1 5 points

1. Il y a $\binom{3}{10} = 120$ façons différentes d'extraire 3 boules parmi 10.
   - On a $p(X = 100) = \dfrac{\binom{3}{4}}{120} = \dfrac{4}{120} = \dfrac{1}{30}$;
   - On a $p(X = 15) = \dfrac{\binom{1}{6} \times \binom{2}{4}}{120} = \dfrac{36}{120} = \dfrac{3}{10}$;
   - On a $p(X = 4) = \dfrac{\binom{2}{6} \times \binom{2}{4}}{120} = \dfrac{60}{120} = \dfrac{1}{2}$;
   - On a $p(X = 0) = \dfrac{\binom{3}{6}}{120} = \dfrac{20}{120} = \dfrac{1}{6}$.
2. On a $E(X) = 90 \times \dfrac{1}{30} + 5 \times \dfrac{3}{10} - 6 \times \dfrac{1}{2} - 10 \times \dfrac{1}{6} = -\dfrac{1}{6} < 0$. Le jeu est défavorable au joueur.
3. • Avec une mise à 11 € l'espérance mathématique passe à :
   $89 \times \dfrac{1}{30} + 4 \times \dfrac{3}{10} - 7 \times \dfrac{1}{2} - 11 \times \dfrac{1}{6} = -\dfrac{7}{6}$.
   • Avec des gains diminués de 1 € l'espérance est égale à :
   $89 \times \dfrac{1}{30} + 4 \times \dfrac{3}{10} - 6 \times \dfrac{1}{2} - 10 \times \dfrac{1}{6} = -\dfrac{1}{2}$.
   La solution la plus rentable pour l'organisateur est donc de mettre la mise à 11 €.

Exercice 2 5 points
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

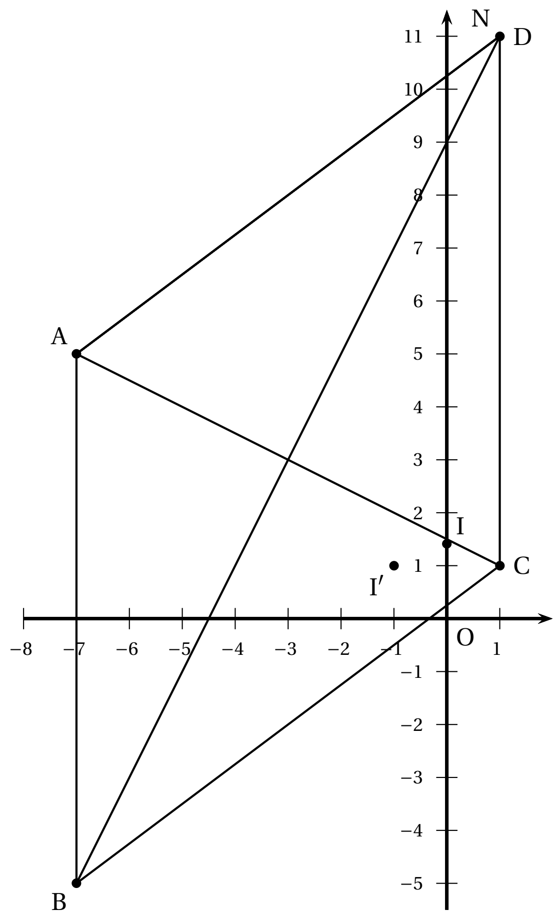
1.
$$P(z) = z^3 + \left(14 - \mathrm{i}\sqrt{2}\right) z^2 + \left(74 - 14\mathrm{i}\sqrt{2}\right) z - 74\mathrm{i}\sqrt{2}.$$

   a. $P(\mathrm{i}y) = (\mathrm{i}y)^3 + \left(14 - \mathrm{i}\sqrt{2}\right)(\mathrm{i}y)^2 + \left(74 - 14\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\mathrm{i}y - 74\mathrm{i}\sqrt{2} = 0 \iff$
   $-\mathrm{i}y^3 - y^2\left(14 - \mathrm{i}\sqrt{2}\right) + \left(74 - 14\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\mathrm{i}y - 74\mathrm{i}\sqrt{2} = 0 \iff$
   $-\mathrm{i}y^3 - 14y^2 - (\mathrm{i}y)^2\sqrt{2} + 74\mathrm{i}y + 14\sqrt{2}y - 74\mathrm{i}\sqrt{2} = 0$. Il faut donc que
   $\left\{\begin{array}{rcl} -14y^2 + 14\sqrt{2}y & = & 0 \\ -y^3 + y^2\sqrt{2} + 74y - 74\sqrt{2} & = & 0 \end{array}\right. \iff$
   $\left\{\begin{array}{rcl} 14y(\sqrt{2} - y) & = & 0 \\ -y^3 - y^2\sqrt{2} + 74y - 74\sqrt{2} & = & 0 \end{array}\right.$
   $y = 0$ ne peut être solution donc $y = \sqrt{2}$ et en reportant dans la deuxième équation on a :
   $-2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 74\sqrt{2} - 74\sqrt{2} = 0$ qui est vraie.

   b. En développant on a
   $P(z) = z^3 + az^2 + bz - z^2\mathrm{i}\sqrt{2} - az\mathrm{i}\sqrt{2} - b\mathrm{i}\sqrt{2} = z^3 + \left(14 - \mathrm{i}\sqrt{2}\right) z^2 + \left(74 - 14\mathrm{i}\sqrt{2}\right) z - 74\mathrm{i}\sqrt{2}$ d'où en identifiant les termes de même degré :
   $\left\{\begin{array}{rcl} a - \mathrm{i}\sqrt{2} & = & 14 - \mathrm{i}\sqrt{2} \\ b - a\mathrm{i}\sqrt{2} & = & 74 - 14\mathrm{i}\sqrt{2} \\ -b\mathrm{i}\sqrt{2} & = & -74\mathrm{i}\sqrt{2} \end{array}\right.$
   La première équation donne $a = 14$ et la troisième $b = 74$.
   On a donc $P(z) = \left(z - \mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2 + 14z + 74\right)$.

c. D'après le résultat précédent :
$P(z) = 0 \iff \left(z - \mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2 + 14z + 74\right) = 0 \iff z = \mathrm{i}\sqrt{2}$ ou
$z^2 + 14z + 74 = 0$.
$z^2+14z+74 = 0 \iff (z+7)^2-49+74 = 0 \iff (z+7)^2+25 = 0 \iff (z+7)^2-(5\mathrm{i})^2 = 0 \iff (z+7+5\mathrm{i})(z+7-5\mathrm{i}) = 0 \iff z = -7-5\mathrm{i}$ ou $z = -7+5\mathrm{i}$.
L'équation a donc trois solutions : $\mathrm{i}\sqrt{2}$, $-7-5\mathrm{i}$ et $-7+5\mathrm{i}$.

2. a.



b. La rotation est définie par $z' - 0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}(z-0)$.

Donc $z_{\mathrm{I'}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \times \sqrt{2}\mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{i}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 + \mathrm{i}$.

c. On doit avoir $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{NC}}$. Avec $\mathrm{N}(x+\mathrm{i}y)$, on a donc :
$\left\{\begin{array}{rcl} 0 & = & 1-x \\ -10 & = & y+1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 0 & = & 1 \\ y & = & 11 \end{array}\right.$
L'affixe de N est $1 + 11\mathrm{i}$.

d. Le point D est le point N précédent.
$Z = \dfrac{z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{C}}}{z_{\mathrm{D}} - z_{\mathrm{B}}} = \dfrac{-7+5\mathrm{i}-1-\mathrm{i}}{1+11\mathrm{i}+7+5\mathrm{i}} = \dfrac{-8+4\mathrm{i}}{8+16\mathrm{i}} = \dfrac{-2+\mathrm{i}}{2+4\mathrm{i}} = \dfrac{(-2+\mathrm{i})(2-4\mathrm{i})}{(2+4\mathrm{i})(2-4\mathrm{i})} = \dfrac{-4+4+8\mathrm{i}+2\mathrm{i}}{4+16} = \dfrac{10\mathrm{i}}{20} = \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.
On a donc $|Z| = \dfrac{1}{2}$ et $\arg(Z) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.
Or $\arg(Z) = \left(\overrightarrow{\mathrm{BD}}, \overrightarrow{\mathrm{CA}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ montre que les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires.
Conclusion : la parallélogramme ABCD a ses diagonales perpendiculaires : c'est un losange

Exercice 2 5 points
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère deux entiers naturels, non nuls, x et y premiers entre eux.
On pose $S = x + y$ et $P = xy$.

1. **a.** • Par l'absurde : si x et $x+y$ ont un diviseur commun celui-ci-ci divise x et leur différence $x+y-x$ c'est-à-dire x et y. Ce n'est pas vrai, donc x et S sont premiers entre eux.
   • Même démonstration pour x et S.

   b. D'après la question précédente : puisque x et S sont premiers entre eux, il existe deux entiers u et v tels que $ux + vS = 1$.
   De même puisque y et S sont premiers entre eux, il existe deux entiers u' et v' tels que $u'y + v'S = 1$.
   En faisant le produit membre à membre on a :
   $(ux+vS)(u'y+v'S) = 1 \iff uu'xy + uv'xS + u'vyS + vv'S^2 = 1 \iff uu'P + \left(uv'x + uv'x + vv'S\right)S = 1$, ce qui montre par réciproque du théorème de Bezout que P et S sont premiers entre eux.

   c. Si x et y sont pairs ils ne sont pas premiers entre eux : impossible.
   Si x et y sont impairs, leur somme S est paire et leur produit P est impair.
   Si x et y sont de parités différentes, S est impaire et P est paire.
   Donc S et P sont de parités différentes.

2. $84 = 7 \times 12 = 7 \times 4 \times 3 = 2^2 \times 3 \times 7$.
   Les diviseurs positifs de 84sont donc : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 7 ; 12 ; 14 ; 21 ; 28 ; 42 ; 84.

3. Il suffit de trouver dans la liste deux diviseurs de 84 premiers entre eux.
   On en peut prendre $x = 2$ puisqu'alors y serait pair (42) ; pour la même raison on ne peut pas prendre $S = 6$ ou $S = 14$ ou $S = 42$.
   $S = 3$, n'est pas possible car les nombres seraient trop petits ; idem pour $S = 4$, $S = 6$;
   $S = 42$ ne peut être obtenu qu'avec 28 et 14 dont le produit est trop grand.
   $S = 21$ ne peut provenir que de 7 et 14 dont le produit est 98 ; impossible.
   Reste $S = 7$ qui peut provenir de $x = 3$ et $y = 4$ ou $x = 4$ et $y = 3$, le produit étant égal à $P = 12$. Ce sont les deux solutions.

4. En posant $a = dx$ et $b = dy$ avec x et y premiers entre eux, donc $d = \text{pgcd}(a\,;b)$, on a donc :
   $a + b = 84 \iff dx + dy = 84 \iff d(x+y) = 84 \iff dS = 84$ et d'autre part :
   $ab = d^2 \iff dx \times dy = d^3 \iff xy = d \iff P = d$, soit en reportant dans la première équation :
   $PS = 84$: on est donc ramené à la question précédente, donc $xy = 3 \times 4 = 12 = d$, d'où les deux nombres sont $a = 12 \times 3 = 36$ et $b = 12 \times 4 = 48$.
   On a bien $36 + 48 = 84$ et $36 \times 48 = 12 \times 3 \times 12 \times 4 = 12 \times 12 \times 12 = 12^3$.

Problème 10 points

Partie A

$$f(x) = (3+x)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}.$$

1. • En plus l'infini : $f(x) = 3\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.
   On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = 0$ et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = 0$, donc par somme de limites : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Donc l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la représentation graphique de f.
   • En moins l'infini : on a :
   $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (3+x) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = +\infty$, donc par produit de limites :
   $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :

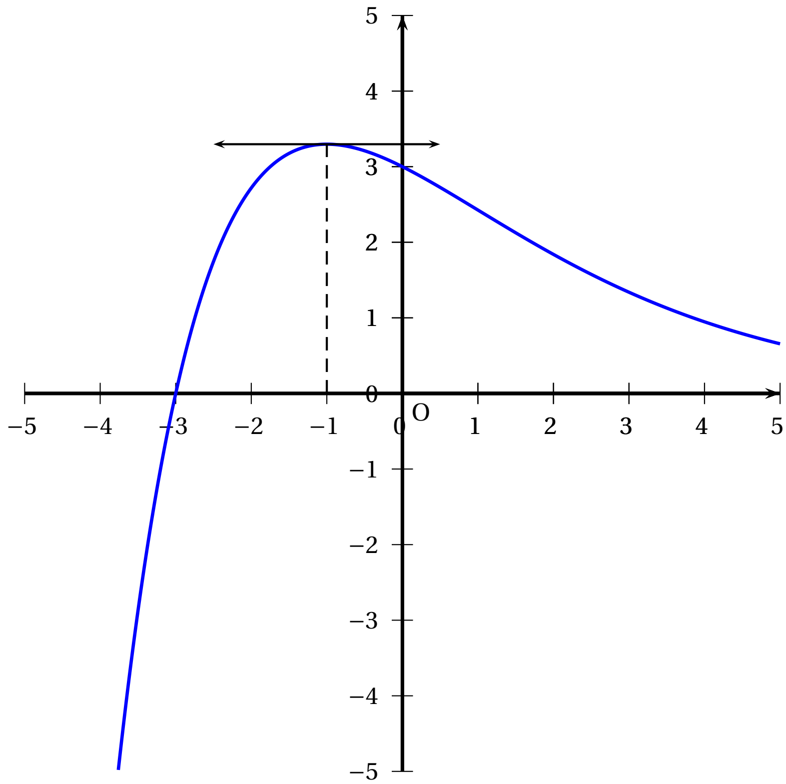
$f'(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + (3+x) \times \left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(1 - \frac{3}{2} - \frac{x}{2}\right) = -\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{x+1}{2}\right)$.

2 et $\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$ étant supérieurs à zéro quel que soit x, le signe de $f'(x)$ est celui de $-(x+1)$.

- $-(x+1) > 0 \iff -1 > x$, donc $f'(x) > 0$ sur $]-\infty\,;\,-1[$;
- $-(x+1) < 0 \iff -1 < x$, donc $f'(x) < 0$ sur $]-1\,;\,+\infty[$;
- $-(x+1) = 0 \iff -1 = x$, donc $f'(-1) = 0$.

La fonction est donc croissante sur $]-\infty\,;\,-1[$ puis croissante sur $]-1\,;\,+\infty[$, $f(-1) = 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \approx 3,297$ étant le maximum de f sur $\mathbb{R}$.

3.



4. On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$, d'où :

$u'(x) = 1$ et $v(x) = -2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.

Toutes ces fonctions sont continues car dérivables ; on peut donc intégrer par parties :

$\mathrm{I} = \left[-2x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right]_{-3}^{0} + \displaystyle\int_{-3}^{0} 2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = \left[-2x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - 4\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right]_{-3}^{0} = -4 - 6\mathrm{e}^{\frac{3}{2}} + 4\mathrm{e}^{\frac{3}{2}} =$

$\mathrm{I} = -2\mathrm{e}^{\frac{3}{2}} - 4 \approx -12,96$.

5. a.
- Sur $]-3\,;\,-1[$, f est croissante de $f(-3) = 0$ à $f(-1) > 3,2$; la fonction f étant continue il existe donc un réel unique $\alpha \in]-3\,;\,-1[$ tel que $f(\alpha) = 3$.

  La calculatrice donne $f(-2) \approx 0,368$ et $f(-1,5) \approx 0,7$, donc $-2 < \alpha < -\dfrac{3}{2}$.
- Sur $]-1\,;\,2[$, f est décroissante de $f(-1) \approx 3,2$ à $f(2) \approx 1,8$; la fonction f étant continue il existe donc un réel unique $\beta \in]-1\,;\,2[$ tel que $f(\beta) = 3$.

b. graphiquement :
- si $m < 0$, on voit que l'équation $f(x) = m$ a une solution (inférieure à -3) ;
- si $0 < m < 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$, on voit que l'équation $f(x) = m$ a deux solutions ;
- si $m = 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$, on voit que l'équation $f(x) = m$ a une solution -1 ;
- si $m > 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$, on voit que l'équation $f(x) = m$ n'a pas de solution.

Partie B

$\varphi(x) = 3\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 3$.

1. $f(x) = 3 \iff (x+3)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = 3 \iff x+3 = 3\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \iff x = 3\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 3 \iff x = \varphi(x)$.
2. **a.** $\varphi'(x) = 3 \times \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} = \frac{3}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} > 0$ car produit de deux nombres supérieurs à zéro ;
   $\varphi''(x) = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} = \frac{3}{4} \times \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} > 0$.
   α est défini par $f(\alpha) = 3 \iff \varphi(\alpha) = \alpha \iff 3\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}} = \alpha + 3$.
   Donc $\varphi'(\alpha) = \dfrac{3\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}}}{2} = \dfrac{\alpha+3}{2}$.

   b. Comme $\varphi''(x) > 0$, la fonction φ' est croissante sur $\mathbb{R}$.
   Comme $\varphi'(x) > 0$, la fonction φ est croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que, pour tout x appartenant à I ;

   a. Sur $[-2\,;\,\alpha]$, la fonction φ est croissante de $f(-2) =$

$\varphi'(-2) \leqslant \varphi'(x) \leqslant \varphi'(\alpha) \iff 3 \times \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} \leqslant \varphi'(x) \leqslant \dfrac{\alpha+3}{2}$.

Or $\dfrac{3}{2\mathrm{e}} > \dfrac{1}{2}$ et $\alpha \leqslant -\dfrac{3}{2} \Rightarrow \dfrac{\alpha+3}{2} \leqslant \dfrac{3}{4}$.

Donc $\dfrac{1}{2} < \varphi'(x) \leqslant \dfrac{3}{4}$.

b. On intègre l'encadrement précédent sur l'intervalle $[x\,;\,\alpha]$ $(x \leqslant \alpha)$:

$\displaystyle\int_x^\alpha \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^\alpha \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^\alpha \frac{3}{4}\,\mathrm{d}t$.

La premiere intégrale est bien entendue positive. On peut donc écrire :

$0 < \left[\dfrac{1}{2}t\right]_x^\alpha \leqslant \varphi(\alpha) - \varphi(x) \leqslant \left[\dfrac{3}{4}t\right]_x^\alpha$ ou encore

$0 \leqslant \dfrac{1}{2}(x-\alpha) \leqslant \varphi(\alpha) - \varphi(x) \leqslant \dfrac{3}{4}(x-\alpha)$

$$\begin{cases} u_0 &= -2 \\ u_{n+1} &= \varphi(u_n) \end{cases}$$

4. **a.** *Initialisation* : $u_0 = -2 \in \mathrm{I}$. La relation est vraie au rang 0.
   Hérédité : supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ on ait $u_n \in \mathrm{I}$. On a montré à la question 3. a. que si $u_n \in \mathrm{I}$, alors $\varphi(u_n) \in \mathrm{I}$, donc $u_{n+1} \in \mathrm{I}$.
   La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle est vraie au rang $n+1$.
   On a donc montré par le principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathrm{I}$.

   b. En utilisant l'encadrement de la question 3. c. avec $u_n \in \mathrm{I}$, on obtient :
   $0 \leqslant \varphi(\alpha) - \varphi(u_n) \leqslant \dfrac{3}{4}(\alpha - u_n) \iff 0 \leqslant \alpha - u_{n+1} \leqslant \dfrac{3}{4}(\alpha - u_n)$.
   Or $-2 < \alpha < -\dfrac{3}{2}$ et $u_0 = -2$ entraînent que :
   $0 \leqslant \alpha - u_0 \leqslant \dfrac{1}{2} \leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^0 \quad (1)$.
   Supposons qu'il existe un entier p tel que $0 \leqslant \alpha - u_p \leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^p$.
   En utilisant l'encadrement (1), on peut donc écrire :
   $0 \leqslant \alpha - u_{p+1} \leqslant \dfrac{3}{4} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^p$ ou encore $0 \leqslant \alpha - u_{p+1} \leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^{p+1}$.
   On a donc montré par récurrence que pour tout naturel n,
   $0 \leqslant \alpha - u_n \leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

c. Comme $-1 < \dfrac{3}{4} < 1$, on sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$, donc par application du théorème des « gendarmes », $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \alpha - u_n = 0$, soit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

d. On a $\left(\dfrac{3}{4}\right)^p \leqslant 10^{-2} \Rightarrow p\ln\left(\dfrac{3}{4}\right) \leqslant -2\ln 10$, par croissance de la fonction logarithme népérien, d'où puisque $\ln\left(\dfrac{3}{4}\right) < 0$,

$p \geqslant \dfrac{-2\ln 10}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}$.

Or $\dfrac{-2\ln 10}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} \approx 16,008$.

Il faut donc prendre $p = 17$. La calculatrice donne $u_{17} \approx -1,75$ au centième près.

L'encadrement $-1,75 < u_{17} < -1,74$ et celui de α, $\quad u_{17} < \alpha < u_{17} + 10^{-2}$ permet de conclure :

$$-1,75 < \alpha - 1,73$$

.