

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

1.

Solution : Réponse d)

Explication non demandée mais donnée à titre indicatif

On répète $n = 80$ fois de manière indépendante une expérience n'ayant que deux issues (la personne choisie pratique le surf ou non) dont la probabilité de succès (la personne pratique le surf) est $p = 0,25$.

Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de succès.

$$\text{On a alors } p(X = 20) = \binom{80}{20} \times 0,25^{20} \times 0,75^{60} \approx 0,103.$$

2.

Solution : Réponse d)

Explication non demandée mais donnée à titre indicatif

$$p(X \geq 100) = 1 - P(X \leq 100)$$

$$\mu = 150 \text{ donc } 100 = \mu - 50 \text{ et } 200 = \mu + 50.$$

$P(X \leq 100) = P(X \leq \mu - 50) = P(X \geq \mu + 50) = P(X \geq 200)$ par symétrie de la courbe de la fonction densité par rapport à la droite d'équation $x = \mu$.

$$\text{Donc } p(X \geq 100) = 1 - P(X \geq 200) = 0,975.$$

3.

Solution : Réponse c)

Explication non demandée mais donnée à titre indicatif

Soit λ le paramètre de la loi exponentielle associée à T alors on a $E(T) = \frac{1}{\lambda}$ on a donc $\frac{1}{\lambda} = 5$ d'où $\lambda = 0,2$.

$$P(T \geq 5) = 1 - P(0 \leq T \leq 5) = 1 - \int_0^5 0,2e^{-0,2t} dt = 1 - [-e^{-0,2t}]_0^5 = 1 - (-e^{-1} + 1) = e^{-1}.$$

4.

Solution : Réponse b)

Explication non demandée mais donnée à titre indicatif

L'intervalle de confiance sur un échantillon de taille n bâti avec la fréquence f de clients satisfaits et

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]. \text{ Son amplitude est donc } \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

$$\frac{2}{\sqrt{n}} = 0,04 \iff \sqrt{n} = 50 \iff n = 2500.$$

EXERCICE 2

6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1.

$$\text{Solution : } u_2 = 2 \times u_1 - 1 = -1$$

$$u_3 = 3u_2 - 1 = -4$$

$$u_4 = 4u_3 - 1 = -17$$

2.

Solution :

Pour N allant de 1 à 12
 $U \leftarrow (N+1) \times U - 1$
 Fin Pour

3.

Solution :

Il semblerait que si $u_1 = 0,7$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ et si $u_1 = 0,8$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Partie B

1.

Solution : F est dérivable sur $[0 ; 1]$ comme composée et produit de fonctions dérivables sur $[0 ; 1]$.

$$F = ue^v \implies F' = u'e^v + uv'e^v = (u' + uv')e^v \text{ avec } \begin{cases} u(x) = -1 - x \\ v(x) = 1 - x \end{cases} \implies \begin{cases} u'(x) = -1 \\ v'(x) = -1 \end{cases}$$

donc $\forall x \in [0 ; 1]$, $f'(x) = (-1 - (-1 - x))e^{1-x} = xe^{1-x} = f(x)$.

Donc F est bien une primitive de f sur $[0 ; 1]$.

2.

Solution :

$$I_1 = \int_0^1 f(x) dx = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) = -2e^0 - (-e^1) = e - 2.$$

3.

Solution :

$$I_2 = 2I_1 - 1 = 2(e - 1) - 1 = 2e - 3.$$

4. a.

Solution :

$$0 \leq x \leq 1 \iff -1 \leq -x \leq 0 \iff 0 \leq 1 - x \leq 1$$

En appliquant la fonction exponentielle sur $[0 ; 1]$ où elle est croissante on obtient alors

$e^0 \leq e^{1-x} \leq e^1$ puis en multipliant membre à membre par x^n qui est positif sur $[0 ; 1]$ on obtient finalement :

$$\forall x \in [0 ; 1], \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e.$$

b.

Solution :

$$\int_0^1 x^n e dx = e \int_0^1 x^n dx = e \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 = e \left(\frac{1}{n+1} - 0 \right) = \frac{e}{n+1}.$$

c.

Solution :

On sait que si $x \in [0 ; 1]$ alors $0 \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$ et comme l'intégrale conserve l'ordre, on obtient :

$$0 \leq \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \leq \int_0^1 x^n e dx.$$

$$\text{On a donc bien } 0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}.$$

d.

Solution :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n+1} = 0 \text{ donc d'après le théorème des gendarmes, } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

Partie C

1.

Solution :**initialisation :** $1! = 1$ donc $1!(u_1 - e + 2) + I_1 = u_1 - e + 2 + e - 2 = u_1$ donc l'égalité est vérifiée au rang $n = 1$ **hérédité :** Soit n un entier naturel non nul tel que l'égalité $u_n = n!(u_1 - e + 2) + I_n$ soit vérifiée. On a alors :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1 \text{ d'après l'énoncé}$$

$$= (n+1) \left(n!(u_1 - e + 2) + I_n \right) - 1 \text{ d'après l'hypothèse de récurrence}$$

$$= (n+1)!(u_1 - e + 2) + (n+1)I_n - 1$$

$$= (n+1)!(u_1 - e + 2) + I_{n+1} \text{ d'après la question 3. de la partie B.}$$

l'égalité est donc héréditaire à partir du rang $n = 1$ or l'égalité est vérifiée au rang $n = 1$ donc par le principe de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n!(u_1 - e + 2) + I_n$.

2. a.

Solution : On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.Si $u_1 = 0,7$ alors $u_1 - e + 2 \approx -0,02 < 0$ donc par opération sur les limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

b.

Solution :Si $u_1 = 0,8$ alors $u_1 - e + 2 \approx 0,08 > 0$ donc par opération sur les limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ **EXERCICE 3****5 points****Commun à tous les candidats****Partie A : étude d'exemples**

1. a.

Solution : $z = i$ alors $z^2 = -1$ et $\frac{1}{z} = \frac{1}{i} = -i$.

b.

Solution : $N_1(-1)$ et $P_1(-i)$.

Voir à la fin de l'exercice.

2.

Solution :

$\Delta = b^2 - 4ac = -3 = (i\sqrt{3})^2 < 0$ on en déduit que l'équation admet deux solutions complexes conjuguées

$$\begin{cases} z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_2 = \overline{z_1} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

3. a.

Solution : $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$$z^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \overline{z}$$

$$\frac{1}{z} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = z^2 = \overline{z}$$

b.

Solution : N_2 et P_2 sont confondus donc A, N_2 et P_2 sont évidemment alignés.

Voir à la fin de l'exercice.

Partie B

1.

Solution :

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C}^*, (z^2 + z + 1) \left(1 - \frac{1}{z}\right) &= z^2 + z + 1 - z - 1 - \frac{1}{z} \\ &= z^2 - \frac{1}{z} \end{aligned}$$

2.

Solution :

A, N et P définis ci-dessus sont alignés si et seulement si il existe un réel k tel que $z_{\overrightarrow{PN}} = k z_{\overrightarrow{PA}}$.

$$\text{Or } z_{\overrightarrow{PN}} = z^2 - \frac{1}{z} \text{ et } z_{\overrightarrow{PA}} = 1 - \frac{1}{z}.$$

Donc les trois points sont alignés si et seulement si il existe un réel k tel que $z^2 - \frac{1}{z} = k \left(1 - \frac{1}{z}\right)$

On vient de prouver que $\forall z \in \mathbb{C}^*, z^2 - \frac{1}{z} = (z^2 + z + 1) \left(1 - \frac{1}{z}\right)$.

Finalement A, N et P définis ci-dessus sont alignés si et seulement si $z^2 + z + 1$ est réel.

3.

Solution :

$$\begin{aligned} z^2 + z + 1 &= (x + iy)^2 + x + iy + 1 \\ &= x^2 + 2ixy - y^2 + x + iy + 1 \\ &= x^2 - y^2 + x + 1 + i(2xy + y) \end{aligned}$$

4. a.

Solution :

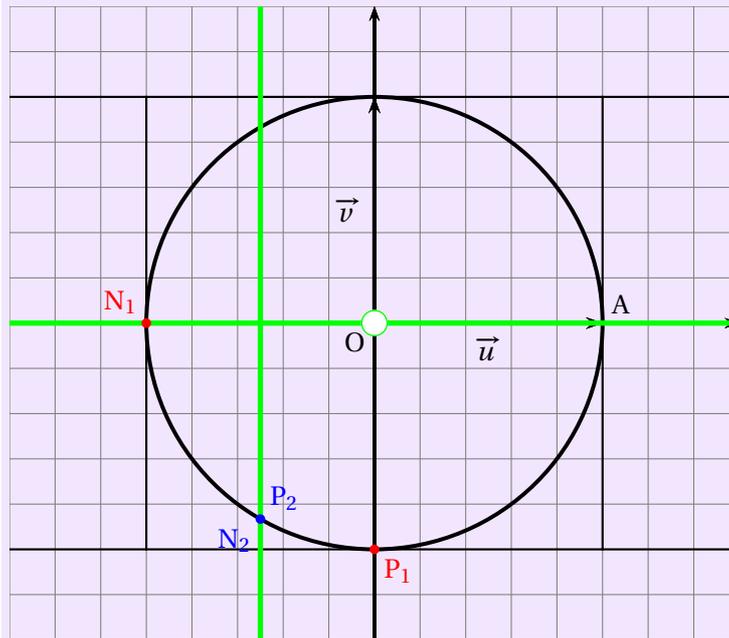
A, N et P soient alignés si et seulement si $z^2 + z + 1$ est réel autrement dit si et seulement si $2xy + y = 0$

$$2xy + y = 0 \iff y(2x + 1) = 0 \iff \begin{cases} y = 0 \\ \text{ou} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

L'ensemble est donc la réunion de la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$ et de l'axe des réels privé de O.
Cet ensemble est représenté en vert sur le graphique.

b.

Solution :



EXERCICE 4

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. a.

Solution : P(2; 0; 0) , Q(0; 0; 2) et Ω(3; 3; 3)

b.

Solution : R(0; 4; 6) donc $\overrightarrow{PR} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{QR} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (PQR) si et seulement si il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{PR} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{QR} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2 + 4b + 6c = 0 \\ 4b + 4c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2b = -2 \\ c = -b \end{cases} \iff \begin{cases} b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Finalement $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (PQR)

c.

Solution :

$\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (PQR) donc (PQR) : $x - y + z + d = 0$.

Or $P(2; 0; 0) \in (PQR)$ donc $x_P - y_P + z_P + d = 0$.

Finalement (PQR) : $x - y + z - 2 = 0$.

2. a.

Solution : Δ est perpendiculaire au plan (PQR) donc \vec{n} est directeur de Δ , de plus $\Omega(3; 3; 3) \in \Delta$.

On en déduit : $\Delta : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 3 - t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$

b.

Solution : Si on pose $t = -\frac{1}{3}$ dans la représentation précédente on obtient les coordonnées de I donc $I \in \Delta$.

De plus $x_I - y_I + z_I - 2 = \frac{8}{3} - \frac{10}{3} + \frac{8}{3} - 2 = 0$ donc $I \in (PQR)$.

Finalement Δ coupe le plan (PQR) au point $I \left(\frac{8}{3}; \frac{10}{3}; \frac{8}{3} \right)$.

c.

Solution :

$$\Omega I = \sqrt{(x_I - x_\Omega)^2 + (y_I - y_\Omega)^2 + (z_I - z_\Omega)^2} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

3. a.

Solution : $x_J - y_J + z_J - 2 = 6 - 4 - 2 = 0$ donc $J \in (PQR)$.

b.

Solution :

$\vec{JK}(0; 2; 2)$ or $\vec{QR}(0; 4; 4)$ donc ces deux vecteurs sont colinéaires.

On en déduit que (JK) et (QR) sont parallèles.

c.

Solution : J et K sont respectivement sur les arêtes [BC] et [CG] du cube

On place J et K aisément en remarquant que $\vec{BJ} = \frac{2}{3}\vec{BC}$ et $\vec{CK} = \frac{1}{3}\vec{CG}$

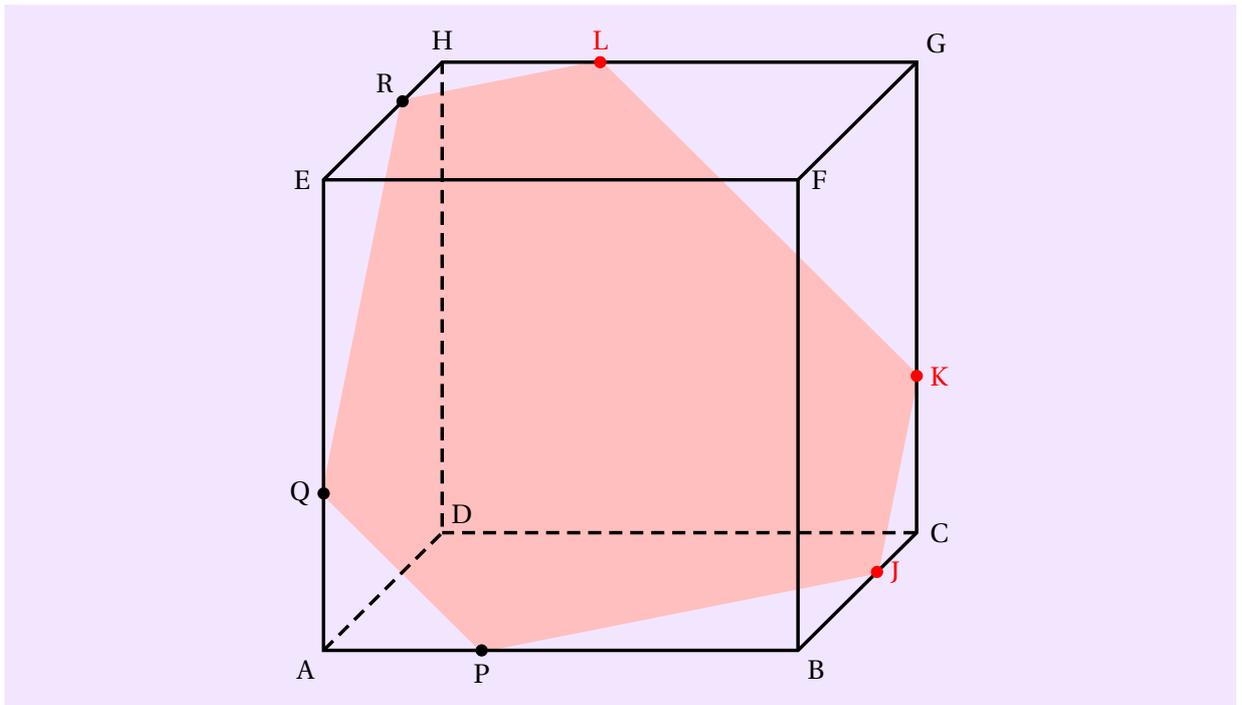
$J \in (PQR)$ et (JK) est parallèle à (QR) donc $(JK) \subset (PQR)$.

(PQR) coupe la plan (ABE) suivant la droite (QP)

donc (PQR) coupe le plan (CDG) suivant une parallèle à (QP) passant par K.

Soit L le point d'intersection entre cette droite et l'arête [GH].

La section du cube par le plan (PQR) est l'hexagone JKLRQP



EXERCICE 4

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A :

1.

Solution : $(x ; y) = (17 ; 23)$ est un couple d'entiers premiers solution de $40 = x + y$.

2.

Solution : Le couple d'entiers relatifs $(x ; y) = (40 ; -40)$ est une solution évidente de $(E) : 20x + 19y = 40$.

Soit $(x ; y)$ un couple de solution de (E) alors on a : $20x + 19y = 40$.

Or on a $20 \times 40 + 19 \times (-40) = 40$.

Par soustraction membre à membre de ces équations on obtient $20(x - 40) + 19(y + 40) = 0$

$$20(x - 40) + 19(y + 40) = 0 \iff 20(40 - x) = 19(y + 40)$$

On en déduit que 20 divise $19(y + 40)$ or 20 et 19 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, 20 divise $(y + 40)$.

Il existe donc un entier relatif k tel que $y + 40 = 20k$.

Alors $19(y + 40) = 19 \times 20k$ donc $20(40 - x) = 19 \times 20k$ soit $40 - x = 19k$.

Il existe donc un entier relatif k tel que
$$\begin{cases} 40 - x = 19k \\ y + 40 = 20k \end{cases}$$

Finalement les couples solutions de (E) sont de la forme $(40 - 19k ; -40 + 20k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

3. a.

Solution : $40 = 2^3 \times 5$

b.

Solution :

Supposons que $x - y$ est pair alors il existe un entier relatif k tel que $x - y = 2k$.

$$x - y = 2k \iff x = y + 2k \iff x + y = 2y + 2k = 2(y + k) \text{ or } (y + k) \in \mathbb{Z}$$

Donc si $x - y$ est pair alors $x + y$ est pair aussi.

Supposons que $x - y$ est impair alors il existe un entier relatif k tel que $x - y = 2k + 1$.

$$x - y = 2k + 1 \iff x = y + 2k + 1 \iff x + y = 2y + 2k + 1 = 2(y + k) + 1 \text{ or } (y + k) \in \mathbb{Z}$$

Donc si $x - y$ est impair alors $x + y$ est impair aussi.

Finalement, $x - y$ et $x + y$ ont la même parité.

c.

Solution : $x^2 - y^2 = 40 \iff (x - y)(x + y) = 40$

D'après ce qui précède on sait que $(x - y)$ et $(x + y)$ ont la même parité.

40 ne peut pas être le produit de deux nombres impairs, on cherche donc à écrire 40 comme produit de deux entiers pairs.

D'après la question 3. a. on en déduit qu'il n'y a que deux solutions : $40 = 2 \times 20 = 4 \times 10$.

x et y étant des entiers naturels, on a $x + y \geq x - y \geq 0$.

On a donc deux solutions possibles :

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ x - y = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 11 \\ y = 9 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases}$$

Finalement les couples d'entiers naturels $(x ; y)$ solutions de $x^2 - y^2 = 40$ sont $(7 ; 3)$ et $(11 ; 9)$.

Partie B : « sommes » de cubes

1. a.

Solution : $40 = 13 + 27$ or $27 = 3^3$ on en déduit une décomposition de 40 en « somme » de 5 cubes :

$$40 = 1^3 + 3^3 + 7^3 + 10^3 - 11^3$$

b.

Solution : En posant $n = 8$ dans l'égalité on obtient :

$$48 = 9^3 + 7^3 - 8^3 - 8^3$$

$$\text{Or } 40 = 48 - 8 = 48 - 2^3$$

On en déduit une décomposition de 40 en « somme » de 5 cubes :

$$40 = -2^3 + 7^3 - 8^3 - 8^3 + 9^3$$

2. a.

Solution :

Reste de la division euclidienne de n par 9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Reste de la division euclidienne de n^3 par 9	0	1	8	0	1	8	0	1	8

b.

Solution :

Supposons que 40 peut être décomposé en « somme » de 3 cubes. Donc, supposons qu'il existe trois entiers relatifs a, b et c tels que $40 = a^3 + b^3 + c^3$

On sait que chacun de ces cubes est congru modulo 9 soit à 0, soit à 1, soit à -1.

$$\text{Alors } (a^3 + b^3 + c^3) \equiv d [9] \text{ avec } d \in \{-3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3\}$$

Or on sait que $40 \equiv 4 [9]$ ce qui rend absurde la supposition.

Finalement, 40 ne peut pas être décomposé en « somme » de 3 cubes.