Durée : 4 heures

Baccalauréat S Centres étrangers juin 2006

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

Partie : A Restitution organisée de connaissances

En fait la démonstration n'en n'est pas une puisque tous les éléments de la démonstration sont donnés dans les prérequis.

Partie B

1. VRAI : $z^2 = -\frac{1}{2}\mathrm{i}$, et $z^4 = \left(z^2\right)^2 = -\frac{1}{4} \in \mathbb{R}$.
2. FAUX : si $z = a + \mathrm{i}b$, $\overline{z} = a - \mathrm{i}b$ et $\left|z + \overline{z}\right| = 0 \iff 2a = 0 \iff a = 0$. Donc tous les imaginaires de la forme bi avec $b \neq 0$ vérifient la relation sans être nuls.
3. VRAI : $z + \frac{1}{z} = 0 \iff \frac{z^2+1}{z} = 0 \iff z^2 + 1 = 0\ (z \neq 0) \iff (z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i}) = 0 \iff$ $z = -\mathrm{i}$ ou $z = \mathrm{i}$.
4. FAUX : Si $z = 1$ et $z' = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, alors $z + z' = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, $|z| = 1$ et $|z + z'| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$ et $z' \neq 0$.

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

1. Si $p_1,\ p_2,\ p_3$ et p_4 dans cet ordre, forment une progression arithmétique de raison r, alors $p_2 = p_1 + r,\ p_3 = p_1 + 2r$ et $p_4 = p_1 + 3r$. On a donc :

$$\left\{\begin{array}{lcl} p_4 & = & p_1 + 3r = 0,4 \\ p_1 + p_1 + r + p_1 + 2r + p_1 + 3r & = & 1 \text{ (loi des probabilités totales)} \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} p_1 + 3r & = & 0,4 \\ 4p_1 + 6r & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 2p_1 + 6r & = & 0,8 \\ 4p_1 + 6r & = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow 2p_1 = 0,2 \iff p_1 = 0,1.$$

On en déduit aussitôt que $r = 0,1$ et finalement :

$$p_1 = 0,1,\ p_2 = 0,2,\ p_3 = 0,3,\ p_4 = 0,4.$$

2. **a.** La probabilité d'obtenir dans l'ordre 1, 2, 4 est $p_{124} = 0,1 \times 0,2 \times 0,4 = 0,008$.

   b. Les tirages donnant trois nombres distincts croissants sont : (1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 3, 4) et (2, 3, 4). La probabilité d'avoir l'un de ces tirages est donc :

$$p_1 \times p_2 \times p_3 + p_1 \times p_2 \times p_4 + p_2 \times p_3 \times p_4 + p_2 \times p_3 \times p_4 =$$
$$0,006 + 0,008 + 0,012 + 0,024 = 0,05.$$

3. **a.** On a un schéma de Bernouilli avec $n = 10$ et $p_4 = 0,4$. On sait que la probabilité d'obtenir i fois le chiffre 4 est (pour $0 \leqslant i \leqslant 10$) :

$$p(X = i) = \binom{10}{i} 0,4^i (1 - 0,4)^{10-i} = \binom{10}{i} 0,4^i 0,6^{10-i}.$$

b. On a $\mathrm{E}(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{10} i \times p(X = i) = \sum_{i=0}^{10} i \times \binom{10}{i} 0,4^i 0,6^{10-i} = 4$.

Cela signifie que sur un grand nombre de tirages le 4 sortira en moyenne 4 fois sur 10.

c. On a $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0)$. Or $p(X = 0) = 0,6^{10}$.

Donc $p(X \geqslant 1) = 1 - 0,6^{10} \approx 0,9939 \approx 0,994$, soit à peu près 994 chances sur 1 000 d'obtenir au moins une fois le 4 en 10 tirages.

4. a. La probabilité d'obtenir $n - 1$ fois un autre chiffre que le 4 et ensuite le 4 au n^{e} tirage est :

$$U_n = 0,6^{n-1} \times 0,4.$$

Cette suite est une suite géométrique de premier terme $U_1 = 0,4$ et de raison $0,6$. Comme $-1 < 0,6 < 1$, cette suite converge vers 0.

b. $S_n = 0,4 \times 0,6^0 + 0,4 \times 0,6^1 + \cdots + 0,4 \times 0,6^{n-1} = 0,4 \times \dfrac{1 - 0,6^n}{1 - 0,6} = 1 - 0,6^n$.

On a de même $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0,6^n = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$.

c. On a $S_n > 0,999 \iff 1 - 0,6^n > 0,999 \iff 0,6^n < 0,001 \iff$

$n \ln 0,6 < \ln 0,001$ (par croissance de la fonction ln) $\iff n > \dfrac{\ln 0,001}{\ln 0,6}$ car

$\ln 0,6 < 0$. Comme $\dfrac{\ln 0,001}{\ln 0,6} \approx 13,5$, il faut donc faire 14 tirages.

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Partie A. Quelques exemples

1. $4 \equiv 1 \pmod 3$, donc $4^n \equiv 1^n \pmod 3$ et finalement $4^n \equiv 1 \pmod 3$.
2. 4 est premier avec 29 (29 est premier). Donc d'après le petit théorème de Fermat $4^{29-1} - 1 \equiv 0 \pmod{29}$ ou encore $4^{28} - 1$ est divisible par 29.
3. $4 = 0 \times 17 + 4$;
   $4^2 = 0 \times 17 + 16$;
   $4^3 = 3 \times 17 + 13$;
   $4^4 = 15 \times 17 + 1$.
   La dernière égalité montre que $4^4 \equiv 1 \pmod{17}$, d'où $\left(4^4\right)^k \equiv 1^k \pmod{17}$ soit $4^{4k} \equiv 1 \pmod{17}$ ou encore $4^{4k} - 1 \equiv 0 \pmod{17}$.
   Conclusion : $4^{4k} - 1$ est divisible par 17.
4. On a $4^2 = 16 = 3 \times 5 + 1$ ou $4^2 \equiv 1 \pmod 5$ d'où il résulte que $4^{2k} \equiv 1 \pmod 5$ ou encore $4^{2k} - 1 \equiv 0 \pmod 5$.
   Conclusion : $4^n - 1$ est divisible par 5 si n est pair.
   Par contre : de $4 \equiv 4 \pmod 5$ et $4^{2k} \equiv 1 \pmod 5$ il résulte par produit que $4^{2k+1} \equiv 4 \pmod 5$.
   Conclusion : $4^n - 1$ est divisible par 5 si et seulement si n est pair.
5. Diviseurs premiers de $4^{28} - 1$: la question 2 a déjà donné le nombre 29; la question 3 a donné le diviseur premier 17; la question 4 a donné le diviseur 5.
   D'autre part, $4 \equiv 1 \pmod 3$ entraîne $4^n \equiv 1 \pmod 3$ ou encore $4^n - 1$ est divisible par 3 qui est premier. Il y a également 5, 43 …

Partie B. Divisibilité par un nombre premier

1. $4 = 2^2$; si p est premier différent de 2, il est premier avec 4, donc d'après le petit théorème de Fermat $4^{p-1} - 1 \equiv 0 \mod p$ ou $4^{p-1} \equiv 1 \mod p$. Le premier premier différent de 2 est 3, donc $n = p - 1 \geqslant 1$.
2. **a.** On a donc : $4^n \equiv 1 \mod p$, $4^b \equiv 1 \mod p$ et il existe un unique couple de naturels $(q\ ;\ r)$ tel que $n = bq + r$ avec $r < b$. On a donc $4^n = 4^{bq+r} = 4^{bq} \times 4^r = \left(4^b\right)^q \times 4^r$.

   On déduit de la seconde congruence que $\left(4^b\right)^q \equiv 1^q \mod p \equiv 1 \mod p$.

   Donc $\left(4^b\right)^q \times 4^r \equiv 4^r \mod p$ et donc que $4^n \equiv 4^r \mod p$.

   Finalement comme $4^n \equiv 1 \mod p$, $4^r \equiv 1 \mod p$.

   b. On vient de démontrer dans la question précédente que si $4^n \equiv 1 \mod p$, alors n est multiple de b, b étant le plus naturel positif tel que $4^b \equiv 1 \mod p$.

   Inversement si $n = kb$, de $4^b \equiv 1 \mod p$, on déduit que $\left(4^b\right)^k \equiv 1^k \mod p$ soit $4^n \equiv 1 \mod p$. L'équivalence est donc démontrée.

   c. D'après la question B. 1 $4^{p-1} \equiv 1 \mod p$ et soit b le plus petit entier tel que $4^b \equiv 1 \mod p$. D'après la question 2. b. il en résulte que $p - 1$ est multiple de b ou encore b (non nul) divise $p - 1$.

Exercice 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A Étude de la fonction f

1. On sait que $\mathrm{e}^x \neq 0$, quel que soit le réel x ; $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} \times \dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$.
2. On a $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$. Interprétation graphique : l'axe des abscisses est asymptote horizontale au voisinage de moins l'infini à $\mathscr{C}$.

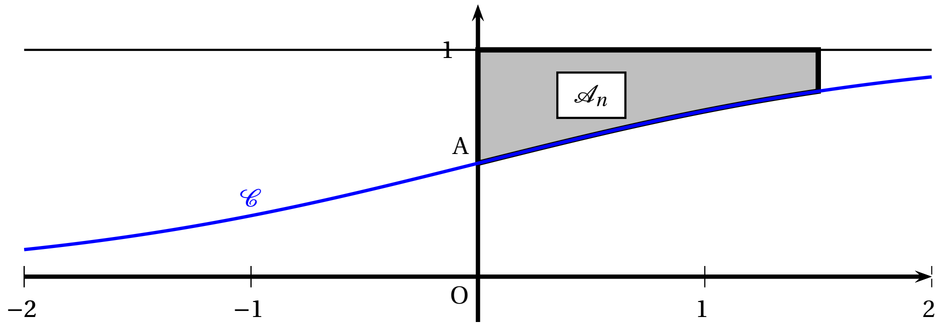
   De même $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$. Interprétation graphique : la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale au voisinage de plus l'infini à $\mathscr{C}$.
3. f est dérivable comme quotient de fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$.

   $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\dfrac{(-\mathrm{e}^{-x})}{(1 + \mathrm{e}^{-x})^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{(1 + \mathrm{e}^{-x})^2}$. Comme $\mathrm{e}^x > 0$ pour tout réel x,

   $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ (de 0 à 1).
4. Il en résulte le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$1/4$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$1/2$	$\nearrow$	1

5.



Partie B

1. Quel que soit le réel x, en utilisant A. 1.

$$f(x)+f(-x)=\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}+\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}=\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+1}=1.$$

Le milieu du segment$[MM']$ est donc le point A de coordonnées $\left(0\,;\,\frac{1}{2}\right)$, et ce point est un centre de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}$.

2. **a.** Soit $n\in\mathbb{N}$; on sait d'après la partie A que $f(x)>0$. Donc, l'aire de la surface comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=n$ est l'intégrale $\displaystyle\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$.

   Donc par différence avec l'aire du rectangle de côtés 1 et n,
   $\mathscr{A}_n=\displaystyle\int_0^n(1-f(x))\,\mathrm{d}x=\int_0^n\left(1-\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right)=\int_0^n\frac{1+\mathrm{e}^{-x}-1}{\mathrm{e}^{-x}+1}\,\mathrm{d}x=\int_0^n\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+1}\,\mathrm{d}x=$
   $-\left[\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)\right]_0^n=-\ln\left(1+\mathrm{e}^{-n}\right)+\ln 2.$

   b. On sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{-n}=0$ donc par continuité de la fonction ln,
   $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-n}\right)=0.$
   Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathscr{A}_n=\ln 2.$

Partie C

1. Si pour tout x réel $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^x+1)^2}=\dfrac{a\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}+\dfrac{b\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$, alors $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^x+1)^2}-\dfrac{a\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x=1}+\dfrac{b\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\iff\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-b\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}=\dfrac{a\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\iff\dfrac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-b)}{(\mathrm{e}^x+1)^2}=\dfrac{a\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\Longrightarrow$
   $a=1$ et $b=-1$.

2. On a pour tout λ positif, $\mathscr{V}(\lambda)=\displaystyle\int_{-\lambda}^0\pi\frac{\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\,\mathrm{d}x=\pi\int_{-\lambda}^0\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x-\pi\int_{-\lambda}^0\frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\,\mathrm{d}x=$
   $\pi\left[\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}\right]_{-\lambda}^0=\pi\left(\ln 2+\dfrac{1}{2}-\ln\left(1+\mathrm{e}^{-\lambda}\right)-\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-\lambda}}\right).$

3. On a toujours $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{-n}=0$ et par continuité de la fonction ln,
   $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-n}\right)=0.$
   Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathscr{V}(\lambda)=\pi\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right).$

EXERCICE 4 **6 points**

Partie A

1. Les faces du cube d'arête 1 sont des carrés de côté 1, dont les diagonales ont pour longueur $\sqrt{2}$. En particulier BD = DE = ED = $\sqrt{2}$. Le triangle BDE est équilatéral.
2. **a.** I est le centre de gravité du triangle BDE ou l'isobarycentre des points B, D et E. Les coordonnées de I sont de la forme $\dfrac{1}{3}(a_{\text{B}}+a_{\text{D}}+a_{\text{D}})$. Avec le repère choisi on a B(1 ; 0 ; 0), D(0 ; 1 ; 0) et E(0 ; 0 ; 1).
   On obtient donc $\text{I}\left(\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$.

   b. On a dans le repère choisi G(1 ; 1 ; 1), donc le vecteur $\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{AG}}$ et le vecteur $\overrightarrow{\text{AI}}$ ont les mêmes coordonnées.
   Autre démonstration : on sait que $\overrightarrow{\text{IB}}+\overrightarrow{\text{ID}}+\overrightarrow{\text{IE}}=\overrightarrow{0} \iff$
   $3\overrightarrow{\text{IA}}+\overrightarrow{\text{AB}}+\overrightarrow{\text{AD}}+\overrightarrow{\text{AE}}=\overrightarrow{0} \iff 3\overrightarrow{\text{IA}}+\overrightarrow{\text{AG}}=\overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{\text{IA}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{AG}}$.
   La relation vectorielle $\overrightarrow{\text{IA}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{AG}}$ signifie que les points A, I et G sont alignés, et encore plus précisément que le point I appartient à la droite (AG), ce point ayant l'abscisse $\dfrac{1}{3}$ si le repère choisi sur cette droite est le repère (A, G).
3. On sait déjà que I centre de gravité du triangle BDE est dans le plan (BDE).
   D'autre part $\overrightarrow{\text{IA}}\begin{pmatrix}1/3\\1/3\\1/3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{BD}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$. Le produit scalaire $\overrightarrow{\text{IA}}\cdot\overrightarrow{\text{BD}}=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}=0$, donc les vecteurs sont orthogonaux.
   De même $\overrightarrow{\text{BE}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$. Le produit scalaire $\overrightarrow{\text{IA}}\cdot\overrightarrow{\text{BE}}=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}=0$, donc les vecteurs sont orthogonaux.
   Conclusion le vecteur $\overrightarrow{\text{IA}}$ orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BDE) est normal à ce plan.
   Conclusion : I est le projeté orthogonal de A sur le plan (BDE).

Partie B

Quel que soit le réel k, M_k est le point de la droite (AG), d'abscisse k pour le repère (A, G).
La droite (AM_k) est donc orthogonale au plan (BDE), donc aussi au plan $\mathcal{P}_k$.
Conclusion : le point N_k est le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathcal{P}_k$.

1. D'après la partie A, on sait que si $k=\dfrac{1}{3}$, $M_{\frac{1}{3}}=\text{I}$, donc $\mathcal{P}_{\frac{1}{3}}=(\text{BDE})$ et $N_{\frac{1}{3}}=\text{B}$
2. **a.** Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\text{A}M_k}$ sont les coordonnées du point M_k, soit $(k\,;\,k\,;\,k)$.

   b. On sait qu'une équation du plan $\mathcal{P}_k$ est de la forme $kx+ky+kz+d=0$; comme il contient M_k, on a $k^2+k^2+k^2+d=0 \iff d=-3k^2$. L'équation du plan $\mathcal{P}_k$ est donc $kx+ky+kz-3k^2=0$ soit pour $k\neq 0$ (cas particulier où M est en A) $x+y+z-3k=0$.

   c. La droite (BC) est définie par les équations des deux plans $x=1$ et $z=0$, donc en remplaçant dans l'équation précédente $1+y+0-3k=0 \iff y=3k-1$.
   Donc $N_k(1\,;\,3k-1\,;\,0)$.

3. M_k et N_k appartiennent au plan $\mathscr{P}_k$ qui est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{\text{A}M_k}$ ou $\overrightarrow{\text{AG}}$. Donc pour tout k réel la droite (M_kN_k) est orthogonale à la droite (AG) ;
Les coordonnées de $\overrightarrow{M_kN_k}$ sont $(1-k\,;\,2k-1\,;\,-k)$, celles de $\overrightarrow{\text{BC}}$ sont $(0\,;1\,;0)$.
$\overrightarrow{M_kN_k}\cdot\overrightarrow{\text{BC}} = 2k-1 = 0 \iff k = \dfrac{1}{2}$.

4. On a $M_kN_k^2 = (1-k)^2+(2k-1)^2+(-k)^2 = 6k^2-6k+2$. La distance est minimale si son carré l'est.
On a à trouver le minimum d'un trinôme :
$6k^2-6k+2 = 6\left(k^2-k+\dfrac{1}{3}\right) = 6\left[\left(k-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}\right]$. Cette expression est minimale quand le carré est nul soit encore pour $k=\dfrac{1}{2}$.
Non demandé : cette distance est égale à $\sqrt{6\left(-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}\right)} = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

5.

Section du cube par le plan $\mathscr{P}_{\frac{1}{2}}$