

Durée : 4 heures

∞ Corrigé du baccalauréat S Métropole–La Réunion ∞
13 septembre 2019

Exercice 1

4 points

Commun à tous les candidats

1. On a $P(X \leq 10) \approx 0,332304$, donc $P(X \geq 10) \approx 0,667696$, soit environ 0,67.

On admet que la probabilité que le dossier choisi, sachant qu'il est de type B, soit celui d'un candidat reçu est égale à 0,70.

2. La probabilité qu'un candidat soit reçu est égale :

$P(R) = P(A \cap R) + P(B \cap R) = 0,6 \times 0,67 + 0,4 \times 0,70 = 0,402 + 0,280 = 0,682$, soit 0,68 au centième près.

3. Le jury examine 500 dossiers choisis aléatoirement parmi les dossiers de type B. Parmi ces dossiers, 368 sont ceux de candidats reçus à l'examen.

On a $n = 500$, $n \geq 30$, et $p = 0,68$. On a $np = 500 \times 0,68 = 340 \geq 5$; $n(1-p) = 500 \times 0,32 = 160 \geq 5$.

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est :

$$\left[p - 1,96 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right] = [0,639 ; 0,721]$$

La fréquence de reçus dans l'échantillon est égale à : $\frac{368}{500} = 0,736$. Comme $0,736 \notin [0,639 ; 0,721]$, le membre du jury a raison.

4. La probabilité d'obtenir un prix du jury étant faible, partons d'une note minimale de 15.

Dans ce cas la probabilité d'avoir un prix du jury est égale à :

$p_{15} = 0,6P(X \geq 15) + 0,4P(Y \geq 15)$; la calculatrice donne $p_{15} \approx 0,18$.

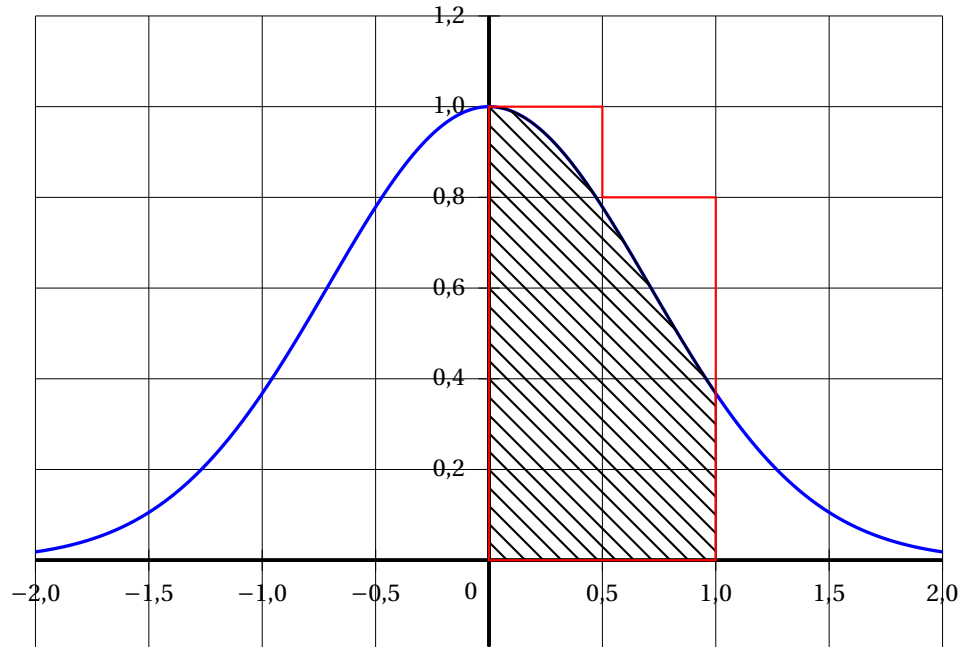
Avec une note minimale de 16 :

$p_{16} = 0,6P(X \geq 16) + 0,4P(Y \geq 16)$; la calculatrice donne $p_{16} \approx 0,12$.

Conclusion : le prix du jury est accordé à tous les candidats ayant au moins 16.

Exercice 2
Commun à tous les candidats

6 points



- La fonction G intégrale d'une fonction positive est croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
On a en effet $G'(t) = g(t) > 0$, d'après l'énoncé.
- $G(1)$ est égale à l'aire (en unité d'aire) de la surface hachurée. Celle-ci a une aire inférieure à celle du polygone rouge composé de 9 rectangles d'aire $0,5 \times 0,2 = 0,1$. l'aire du polygone est donc égale à $0,9$ et $G(1) < 0,9$.
- Pour $t \geq 0$, $G(-t) = \int_0^{-t} g(u) du = - \int_{-t}^0 g(u) du = - \int_0^t g(u) du$, d'après la symétrie de \mathcal{C}_g autour de l'axe des ordonnées.
D'après la question précédente G est croissante sur $[0 ; +\infty[$ et comme $G(0) = 0$, on a donc $G(t) > 0$ pour t positif, donc $G(-t) < 0$: la fonction G n'est pas positive sur \mathbb{R} .

Dans la suite du problème, la fonction g est définie sur \mathbb{R} par $g(u) = e^{-u^2}$.

Partie B

1. Étude de g

- On sait que $\lim_{u \rightarrow -\infty} e^{-u^2} = \lim_{u \rightarrow +\infty} e^{-u^2} = 0$, donc $\lim_{u \rightarrow -\infty} g(u) = \lim_{u \rightarrow +\infty} g(u) = 0$.
- g est dérivable sur \mathbb{R} et sur cet intervalle :
 $g'(u) = -2ue^{-u^2}$. Comme $e^{-u^2} > 0$ quel que soit le réel u , le signe de $g'(u)$ est donc celui de $-u$.
 Sur \mathbb{R}^- , $-u \geq 0$, donc $g'(u) \geq 0$: la fonction g est croissante sur \mathbb{R}^- ;
 Sur \mathbb{R}^+ , $-u \leq 0$, donc $g'(u) \leq 0$: la fonction g est décroissante sur \mathbb{R}^+ .

- c. La fonction g étant croissante sur \mathbb{R}^- , puis décroissante sur \mathbb{R}^+ , elle a pour maximum $g(0) = e^0 = 1$.
Conclusion : $g(x) \leq 1$ et en particulier $g(1) \leq 1$.
2. a. On lit $f = \frac{77}{100} = 0,77$.
- b. f , x et y sont des nombres réels, n , c et i sont des entiers naturels.
ALEA est une fonction qui génère aléatoirement un nombre compris entre 0 et 1.

```

c ← 0
Pour i variant de 1 à n faire :
    x ← ALEA
    y ← ALEA
    Si y ≤ e-x2 alors
        c ← c + 1
    fin Si
fin Pour
f ← c/n

```

- c. Une exécution de l'algorithme pour $n = 1000$ donne $f = 0,757$.
L'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la valeur exacte de I est $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = [0,725 ; 0,789]$.

Partie C

On se propose de déterminer une majoration de $G(t)$ pour $t \geq 1$.

1. *Un résultat préliminaire.*

On admet que, pour tout réel $u \geq 1$, on a $g(u) \leq \frac{1}{u^2}$.

Si pour $u \geq 1$, on a $g(u) \leq \frac{1}{u^2}$, alors en intégrant ces fonctions de 1 à t : $\int_1^t g(u) du \leq \int_1^t \frac{1}{u^2} du$,
soit :

$$\int_1^t g(u) du \leq \left[-\frac{1}{u} \right]_1^t \text{ ou } \int_1^t g(u) du \leq -\frac{1}{t} + 1$$

2. On a $G(t) = \int_0^1 g(u) du + \int_1^t g(u) du$.

On a vu à la question 1. c. que sur $[0; 1]$, $g(t) \leq 1$ et donc en intégrant sur l'intervalle $[0; 1]$,
 $G(t) \leq 1$.

Dans la question précédente on a démontré que :

$$\int_1^t g(u) du \leq 1 - \frac{1}{t}, \text{ d'où par somme :}$$

$G(t) \leq 2 - \frac{1}{t}$. Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} = 0$, la limite de $G(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$ est majorée par 2.

Exercice 3

5 points

Commun à tous les candidats

Préciser si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

1. a. **Affirmation 1 :**

$$\text{On a } (E) : 2z^2 + (4-5)z + 4 = 0 \iff 2z^2 - z + 4 = 0.$$

On a $\Delta = 1 - 32 < 0$: les solutions sont donc complexes. **Affirmation 1** : fausse.

b. Si ai est une solution imaginaire pure, alors :

$$-2a^2 + 2ai(m-5) + m = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2a^2 + m = 0 \\ m - 5 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} m = 2a^2 \\ m = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{5}{2}} = a \\ m = 5 \end{cases}$$

Pour $m = 5$ il existe deux solutions imaginaires pures : $\sqrt{\frac{5}{2}}i$ et $-\sqrt{\frac{5}{2}}i$. **Affirmation 2** : vraie.

2. Soit A et B les points d'affixes respectives 6 et 5i. Alors $|z-6| = |z+5i|$ signifie $MA = MB$, M étant un point d'affixe z. Donc S est la droite médiatrice du segment [AB]. **Affirmation 3** : fausse.

3.

$$d : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

On note d' la droite passant par le point B(4 ; 4 ; -6) et de vecteur directeur $\vec{v}(5 ; 2 ; -9)$. Une

$$\text{équation paramétrique de } d' \text{ est : } \begin{cases} x = 4 + 5t' \\ y = 4 + 2t' \\ z = -6 - 9t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}.$$

Ces droites ne sont pas parallèles car leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires. Elles sont sécantes si :

$$\begin{cases} -1 + t = 4 + 5t' \\ 2 - t = 4 + 2t' \\ 3 + t = -6 - 9t' \end{cases} \iff \begin{cases} t = 5 + 5t' \\ t = -2 - 2t' \\ t = -9 - 9t' \end{cases} \iff \begin{cases} t = 5 + 5t' \\ 5 + 5t' = -2 - 2t' \\ 5 + 5t' = -9 - 9t' \end{cases} \iff \begin{cases} t = 5 + 5t' \\ 7t' = -7 \\ 14t' = -14 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 5 + 5t' \\ t' = -1 \\ t' = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 5 - 5 \\ t' = -1 \\ t' = -1 \end{cases}.$$

Il existe donc un point commun à d et à d' le point de coordonnées $(-1 ; 2 ; 3)$. les droites sont donc coplanaires.

Affirmation 4 : vraie.

4. En prenant comme repère $(\vec{AB} ; \vec{AD} ; \vec{AE})$, on a A(0 ; 0 ; 0), B(1 ; 0 ; 0), D(0 ; 1 ; 0), E(0 ; 0 ; 1), G(1 ; 1 ; 1).

$$\text{On a } \vec{DE} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{BG} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Or } \vec{DE} \cdot \vec{AB} = 0 + 0 + 0 = 0 \text{ et } \vec{DE} \cdot \vec{BG} = 0 - 1 + 1 = 0.$$

\vec{DE} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan ABG, il est donc normal à ce plan.

Affirmation 5 : vraie.

Exercice 4**5 points****Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

$$f(x) = \frac{2+3x}{4+x}.$$

Partie A

$$1. u_1 = f(u_0) = \frac{2+9}{4+3} = \frac{11}{7}.$$

2. La fonction f est définie et dérivable sur $[0; 4]$ et sur cet intervalle :

$$f'(x) = \frac{3(4+x) - 1(2+3x)}{(4+x)^2} = \frac{12+3x-2-3x}{(4+x)^2} = \frac{10}{(4+x)^2}$$

Quotient de nombres positifs ce nombre dérivé est positif quel que soit x dans l'intervalle $[0; 4]$.
La fonction f est donc croissante sur $[0; 4]$.

3. Démonstration par récurrence :

Initialisation

On a d'après la première question : $1 \leq u_1 \leq u_0 \leq 3$: l'encadrement est vrai au rang 0;

Hérédité

Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$; par croissance de la fonction f sur $[0; 4]$, on

$$f(1) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(3) \text{ ou car } f(1) = \frac{5}{5} = 1 \text{ et } f(3) = \frac{11}{7} \leq 3,$$

$1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 3$: la relation est donc vraie au rang $n+1$.

Conclusion : l'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai à un rang quelconque n il est vrai au rang suivant $n+1$: d'après le principe de récurrence pour tout naturel n , $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$.

4. a. D'après la question précédente la suite (u_n) est décroissante, minorée par 1 : elle converge donc vers une limite $\ell \geq 1$.

b. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) ; montrer l'égalité :

$$\ell = \frac{2+3\ell}{4+\ell}$$

c. De l'égalité $u_{n+1} = f(u_n) = \frac{2+3u_n}{4+u_n}$ on en déduit par continuité de la fonction f (puisque f est dérivable) :

$$\ell = \frac{2+3\ell}{4+\ell}.$$

On en déduit que $\ell(4+\ell) = 2+3\ell \iff \ell + \ell - 2 = 0$.

Or $\Delta = 1 + 4 \times 2 = 9 = 3^2$. Il y a deux solutions :

$$\ell_1 = \frac{-1-3}{2} = -2 \text{ et } \ell_2 = \frac{-1+3}{2} = 1.$$

Comme $\ell \in [1; 3]$, la seule solution est $\ell_2 = 1$.

Partie B

On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_0 = 0, 1 \text{ et pour tout entier naturel } n, v_{n+1} = f(v_n).$$

1. Voir à la fin l'annexe. l'**annexe, à rendre avec la copie.**

On peut conjecturer que la suite (v_n) est croissante et qu'elle a pour limite 1.

$$2. \quad a. \quad 1 - v_{n+1} = 1 - \frac{2+3v_n}{4+v_n} = \frac{4+v_n-2-3v_n}{4+v_n} = \frac{2-2v_n}{4+v_n} = \frac{2}{4+v_n} (1 - v_n).$$

b. *Initialisation* pour $n = 0$, $1 - v_0 = 0,9$; or $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$.

On a bien $0 \leq 1 - v_0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0$.

Hérédité Supposons qu'au rang $n \in \mathbb{N}$ quelconque, on ait $1 - v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

On a $1 - v_{n+1} = \frac{2}{4 + v_n} (1 - v_n)$, donc d'après l'hypothèse de récurrence :

$$1 - v_{n+1} \leq \frac{2}{4 + v_n} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Or $0 \leq 1 - v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \iff v_n \geq 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq 0$; il suit que $4 + v_n \geq 4$, donc en prenant les inverses $0 \leq \frac{1}{4 + v_n} \leq \frac{1}{4}$.

On a donc $0 \leq 1 - v_{n+1} \leq 2 \times \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^n$, soit finalement :

$$0 \leq 1 - v_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} : \text{l'encadrement est vrai au rang } n + 1.$$

L'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai à un rang n quelconque il est vrai au rang $n + 1$: d'après le principe de récurrence :

quel que soit le naturel n , $0 \leq 1 - v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

3. Comme $0 < \frac{1}{2} < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, donc l'encadrement trouvé à la question précédente montre que la limite de $1 - v_n = 0$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1.$$

Exercice 4

5 points

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

Un laboratoire étudie l'évolution d'une population d'insectes parasites de plantes.

Cette évolution comporte deux stades : un stade larvaire et un stade adulte qui est le seul au cours duquel les insectes peuvent se reproduire.

L'observation de l'évolution de cette population conduit à proposer le modèle suivant.

Chaque semaine :

- Chaque adulte donne naissance à 2 larves puis 75 % des adultes meurent.
- 25 % des larves meurent et 50 % des larves deviennent adultes.

Pour tout entier naturel n , on note ℓ_n le nombre de larves et a_n le nombre d'adultes au bout de n semaines.

Pour tout entier naturel n , on note X_n la matrice colonne définie par : $X_n = \begin{pmatrix} \ell_n \\ a_n \end{pmatrix}$

1. Chaque semaine,

- chaque adulte donne naissance à 2 larves, donc la part de larves la semaine $n + 1$ provenant des adultes de la semaine n est $2 \times a_n$;
- 25 % des larves meurent et 50 % des larves deviennent adultes, donc il reste 25 % de larves quand on passe de la semaine n à la semaine $n + 1$. La part de larves la semaine $n + 1$ provenant des larves de la semaine n est $0,25\ell_n$.

On a donc $\ell_{n+1} = 0,25\ell_n + 2a_n$.

Chaque semaine,

- 75 % des adultes meurent donc il en reste 25 % : la part des adultes la semaine $n + 1$ provenant des adultes de la semaine n est $0,25a_n$;
- 50 % des larves deviennent adultes donc la part des adultes la semaine $n + 1$ provenant des larves de la semaine n est $0,5\ell_n$.

On a donc $a_{n+1} = 0,5\ell_n + 0,25a_n$.

Le système $\begin{cases} \ell_{n+1} = 0,25\ell_n + 2a_n \\ a_{n+1} = 0,5\ell_n + 0,25a_n \end{cases}$ s'écrit sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \ell_{n+1} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 & 2 \\ 0,5 & 0,25 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \ell_n \\ a_n \end{pmatrix} \text{ ou encore } X_{n+1} = AX_n \text{ où } A = \begin{pmatrix} 0,25 & 2 \\ 0,5 & 0,25 \end{pmatrix}.$$

2. On note U et V les matrices colonnes : $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$, où a est un nombre réel.

$$\text{a. } AU = \begin{pmatrix} 0,25 & 2 \\ 0,5 & 0,25 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 \times 2 + 2 \times 1 \\ 0,5 \times 2 + 0,25 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 1,25 \end{pmatrix} = 1,25 \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1,25U.$$

$$\begin{aligned} \text{b. } AV = -0,75V &\iff \begin{pmatrix} 0,25 & 2 \\ 0,5 & 0,25 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = -0,75 \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 0,25a + 2 \\ 0,5a + 0,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,75a \\ -0,75 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 0,25a + 2 = -0,75a \\ 0,5a + 0,25 = -0,75 \end{cases} \iff a = -2 \end{aligned}$$

Dans la suite, le réel a est fixé de sorte qu'il est la solution de $AV = -0,75V$ donc $V = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. On admet qu'il existe deux nombres réels α et β tels que : $X_0 = \alpha U + \beta V$ et $\alpha > 0$.

a. Soit \mathcal{P}_n l'égalité $X_n = \alpha(1,25)^n U + \beta(-0,75)^n V$.

On va démontrer par récurrence sur n que \mathcal{P}_n est vraie pour tout n .

• **Initialisation**

On sait que $X_0 = \alpha U + \beta V$ donc $X_0 = \alpha(1,25)^0 U + \beta(-0,75)^0 V$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

• **Hérédité**

On suppose la propriété vraie pour un n quelconque, et on va démontrer qu'elle est vraie au rang $n + 1$.

$$X_n = \alpha(1,25)^n U + \beta(-0,75)^n V \text{ donc}$$

$$X_{n+1} = AX_n = A(\alpha(1,25)^n U + \beta(-0,75)^n V) = \alpha(1,25)^n AU + \beta(-0,75)^n AV$$

Or $AU = 1,25U$ et $AV = -0,75V$ donc

$$X_{n+1} = \alpha(1,25)^n (1,25)U + \beta(-0,75)^n (-0,75)V = \alpha(1,25)^{n+1} U + \beta(-0,75)^{n+1} V$$

La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

• **Conclusion**

La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout n , donc elle est vraie pour tout n .

Pour tout n , on a $X_n = \alpha(1,25)^n U + \beta(-0,75)^n V$.

b. $X_n = \alpha(1,25)^n U + \beta(-0,75)^n V$ donc $\begin{pmatrix} \ell_n \\ a_n \end{pmatrix} = \alpha(1,25)^n \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta(-0,75)^n \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ce qui équivaut

$$\text{à } \begin{cases} \ell_n = 2\alpha(1,25)^n - 2\beta(-0,75)^n \\ a_n = \alpha(1,25)^n + \beta(-0,75)^n \end{cases} \text{ ou encore } \begin{cases} \ell_n = 2(1,25)^n \left(\alpha - \beta \left(\frac{-0,75}{1,25} \right)^n \right) \\ a_n = (1,25)^n \left(\alpha + \beta \left(\frac{-0,75}{1,25} \right)^n \right) \end{cases}$$

$$\text{c'est-à-dire } \begin{cases} \ell_n = 2(1,25)^n (\alpha - \beta(-0,6)^n) \\ a_n = (1,25)^n (\alpha + \beta(-0,6)^n) \end{cases}$$

$$4. \frac{\ell_n}{a_n} = \frac{2(1,25)^n (\alpha - \beta(-0,6)^n)}{(1,25)^n (\alpha + \beta(-0,6)^n)} = \frac{2(\alpha - \beta(-0,6)^n)}{(\alpha + \beta(-0,6)^n)}$$

Or $-1 < 0,6 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,6)^n = 0$;

il s'ensuit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2(\alpha - \beta(-0,6)^n) = 2\alpha$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha + \beta(-0,6)^n) = \alpha$.

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ell_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\alpha}{\alpha} = 2.$$

On en déduit, qu'à long terme, le nombre de larves sera le double du nombre d'adultes.

Partie B

1. On considère l'équation (E) : $19x - 6y = 1$.

Les nombres 19 et 6 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Bézout, l'équation $19x - 6y = 1$ admet une infinité de couples d'entiers relatifs $(a; b)$ solutions.

$19 \times 1 - 6 \times 3 = 1$ donc le couple $(1; 3)$ est solution de (E).

• Soit $(a; b)$ un couple d'entier solutions de (E); on a donc $19 \times a - 6 \times b = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} 19 \times 1 - 6 \times 3 = 1 \\ 19 \times a - 6 \times b = 1 \end{array} \right\} \text{ par soustraction } \implies 19(1-a) - 6(3-b) = 0 \text{ donc } 19(1-a) = 6(3-b)$$

$19(1-a) = 6(3-b)$ donc 19 divise $6(3-b)$; or 19 et 6 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 19 divise $3-b$. Donc $3-b$ peut s'écrire $19k$ où k est un entier relatif, ce qui entraîne $b = 3 - 19k$.

$19(1-a) = 6(3-b)$ et $3-b = 19k$ donc $19(1-a) = 6 \times 19k$ donc $1-a = 6k$, ce qui entraîne $a = 1 - 6k$.

On peut donc dire que si $(a; b)$ est une solution de (E), alors $(a; b)$ s'écrit sous la forme $(1 - 6k; 3 - 19k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

• Réciproquement, pour tout k de \mathbb{Z} , $19(1 - 6k) - 6(3 - 19k) = 19 - 114k - 18 + 114k = 1$ donc tout couple $(1 - 6k; 3 - 19k)$ où $k \in \mathbb{Z}$ est solution de (E).

L'ensemble des solutions de (E) est donc $\{(1 - 6k; 3 - 19k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

On cherche les couples d'entiers $(x; y)$ solutions de l'équation (E) et vérifiant $2000 \leq x \leq 2100$, ce qui revient à chercher k de \mathbb{Z} tel que $2000 \leq 1 - 6k \leq 2100$ autrement dit $1999 \leq -6k \leq 2099$

$$\text{ou encore } -\frac{2099}{6} \leq k \leq -\frac{1999}{6}.$$

$-\frac{2099}{6} \approx -349,8$ et $-\frac{1999}{6} \approx -332,2$ et comme k est entier, on a $-349 \leq k \leq -334$ ce qui fait 16 valeurs de k donc 16 couples solutions de (E) vérifiant la condition imposée.

2. Soit n un entier naturel.

Un nombre d qui divise deux nombres a et b divise toute combinaison linéaire de ces deux nombres.

Soit d un diviseur commun à $(n+3)$ et $(2n+3)$, alors d divise $(2(n+3) - (2n+3))$ donc d divise 3. Les seuls diviseurs communs possibles de $(n+3)$ et $(2n+3)$ sont donc les diviseurs de 3, c'est-à-dire 1 et 3.

- Si n est multiple de 3, alors $2n+3$ et $n+3$ sont aussi multiples de 3 donc les deux nombres $(n+3)$ et $(2n+3)$ ne sont pas premiers entre eux.
- Si n n'est pas multiple de 3, alors n s'écrit $3q+r$ avec $r=1$ ou $r=2$.
 - $2n+3 = 2(3q+r) + 3 = 3(2q+1) + 2r$ n'est pas multiple de 3.
 - $n+3 = 3q+r+3 = 3(q+1) + r$ n'est pas multiple de 3.

3 n'est pas un diviseur commun à $(n+3)$ et $(2n+3)$ donc le seul autre diviseur commun possible est 1 ce qui prouve que $(n+3)$ et $(2n+3)$ sont premiers entre eux.

On a donc démontré que les entiers $(2n+3)$ et $(n+3)$ sont premiers entre eux si et seulement si n n'est pas un multiple de 3.

Annexe

À rendre avec la copie

