EXERCICE 1 — 7 points

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par : $h(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.

1. Déterminer la limite de la fonction h en $+\infty$.

Solution : Deux méthodes

méthode 1 : $\forall x \geqslant 0$, $h(x) = x\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = \dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}}$

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc par quotient, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$

méthode 2 : On pose $X = -x$ alors quand x tend vers $+\infty$, X tend vers $-\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{X\to-\infty} -X\mathrm{e}^X = 0$ d'après le cours

2. Étudier les variations de la fonction h sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et dresser son tableau de variations.

Solution : h est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$

$h = uv \Longrightarrow h' = u'v + uv'$ avec $\begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$

$\forall x \geqslant 0$, $h'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$

sur $[0\,;\,+\infty[$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $h'(x)$ est du signe de $(1-x)$, on en déduit les variations de $h(x)$:

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	-	
$h(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

3. L'objectif de cette question est de déterminer une primitive de la fonction h.

   a. Vérifier que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, on a :

$$h(x) = \mathrm{e}^{-x} - h'(x)$$

   où h' désigne la fonction dérivée de h.

   Solution : $\forall x \geqslant 0$, $h(x) + h'(x) = x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}$
   donc on a bien $\forall x \geqslant 0$, $h(x) = \mathrm{e}^{-x} - h'(x)$

   b. Déterminer une primitive sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ de la fonction
   $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$.

   Solution : $x \longmapsto (-\mathrm{e}^{-x})$ est une primitive de $x \longmapsto (\mathrm{e}^{-x})$ sur $[0\,;\,+\infty[$

   c. Déduire des deux questions précédentes une primitive de la fonction h sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

   Solution : $\forall x \geqslant 0$, $h(x) = \mathrm{e}^{-x} - h'(x)$ donc $H(x) = -\mathrm{e}^{-x} - h(x) = (-1-x)\,\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de h sur $[0\,;\,+\infty[$

Partie B

On définit les fonctions f et g sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + \ln(x+1) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \ln(x+1).$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les représentations graphiques respectives des fonctions f et g dans un repère orthonormé.
Ces deux courbes sont tracées en annexe page ??. Cettee annexe est à rendre avec la copie.

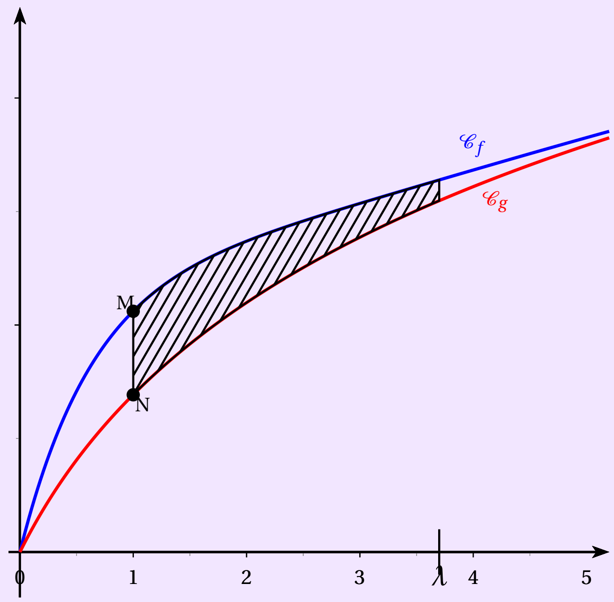
1. Pour un nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, on appelle M le point de coordonnées $(x\,;\,f(x))$ et N le point de coordonnées $(x\,;\,g(x))$: M et N sont donc les points d'abscisse x appartenant respectivement aux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

   a. Déterminer la valeur de x pour laquelle la distance MN est maximale et donner cette distance maximale.

   Solution : M et N ayant la même abscisse, la distance MN est donnée par
   MN = $f(x) - g(x)$ car $f(x) \geqslant g(x)$ sur $[0\,;\,+\infty[$
   MN = $x\mathrm{e}^{-x} = h(x)$ donc MN est maximale quand h est maximale c'est à dire pour $x = 1$ et sa valeur est $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx 0{,}368$

   b. Placer sur le graphique fourni en annexe les points M et N correspondant à la valeur maximale de MN.

   Solution :



2. Soit λ un réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. On note D_λ le domaine du plan délimité par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et par les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.

   a. Hachurer le domaine D_λ. correspondant à la valeur λ proposée sur le graphique en annexe.

   Solution : Voir graphique précédent

b. On note A_λ. l'aire du domaine D_λ, exprimée en unités d'aire. Démontrer que :

$$A_\lambda = 1 - \frac{\lambda+1}{e^\lambda}.$$

Solution : $f(x)$ et $g(x)$ sont positives sur $[0\,;\,+\infty[$ et $f(x) \geqslant g(x)$, alors on a :

$$\begin{aligned} A_\lambda &= \int_0^\lambda \big(f(x)-g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_0^\lambda h(x)\,\mathrm{d}x \\ &= [H(x)]_0^\lambda = H(\lambda) - H(0) \\ &= \big((-1-\lambda)\,e^{-\lambda}\big) - (-1) = 1-(1+\lambda)e^{-\lambda} \\ &= 1 - \frac{1+\lambda}{e^\lambda} \end{aligned}$$

c. Calculer la limite de A_λ lorsque λ tend vers $+\infty$ et interpréter le résultat.

Solution : $A_\lambda = 1 - \dfrac{\lambda}{e^\lambda} - \dfrac{1}{e^\lambda} = 1 - \lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda}$

On pose $T = -\lambda$ quand λ tend vers $+\infty$, T tend vers $-\infty$

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A_\lambda = \lim\limits_{T\to-\infty} 1 + Te^T - e^T = 1$ car $\lim\limits_{T\to-\infty} e^T = \lim\limits_{T\to-\infty} Te^T = 0$ d'après le cours

3. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	
	λ est un réel positif
	S est un réel strictement compris entre 0 et 1.
Initialisation :	
	Saisir S
	λ prend la valeur 0
Traitement :	
	Tant Que $1 - \dfrac{\lambda+1}{e^\lambda} < S$ faire
	λ prend la valeur $\lambda+1$
	Fin Tant Que
Sortie :	
	Afficher λ

a. Quelle valeur affiche cet algorithme si on saisit la valeur $S = 0{,}8$?

Solution : Il faut résoudre $1 - \dfrac{1+\lambda}{e^\lambda} = 0{,}8$

$1 - \dfrac{1+\lambda}{e^\lambda} = 0{,}8 \iff -(1+\lambda)\,e^{-\lambda} = -0{,}2 \iff H(x) = -0{,}2$

$H'(x) = h(x) > 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$ donc H est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$

de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x) = 0$

H est continue et strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ à valeurs dans $[-1\,;\,0[$ or $-0{,}2 \in [-1\,;\,0[$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $H(x) = -0{,}2$ admet une unique solution α sur $[0\,;\,+\infty[$

Par balayage on trouve $2 < \alpha < 3$

donc la valeur renvoyée par l'algorithme est $\lambda = 3$

b. Quel est le rôle de cet algorithme ?

Solution : Cet algorithme permet de trouver la plus petite valeur entière de λ à partir de laquelle A_λ dépasse une valeur donnée S

EXERCICE 2 — 3 points

Commun à tous les candidats

L'espace est mini d'un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne : $2x - z - 3 = 0$.
On note A le point de coordonnées $\left(1\ ;\ a\ ;\ a^2\right)$ où a est un nombre réel.

1. Justifier que, quelle que soit la valeur de a, le point A n'appartient pas au plan $\mathscr{P}$.

Solution : $2x_A - z_A - 3 = 2 - a^2 - 3 = -1 - a^2 < 0$ donc $2x_A - z_A - 3 \neq 0$
ce qui signifie que A n'appartient pas au plan $\mathscr{P}$

2. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ (de paramètre t) passant par le point A et orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

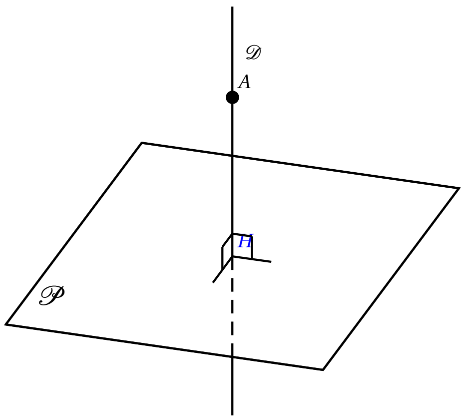
Solution : $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ est normal à $\mathscr{P}$ donc directeur de $\mathscr{D}$ et $A(1\ ;\ a\ ;\ a^2) \in \mathscr{D}$ alors

$$\mathscr{D} : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = a \\ z = a^2 - t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

b. Soit M un point appartenant à la droite $\mathscr{D}$, associé à la valeur t du paramètre dans la représentation paramétrique précédente.
Exprimer la distance AM en fonction du réel t.

Solution : On se situe dans un repère orthonormé donc
$AM^2 = (x_M - x_A)^2 + \left(y_M - y_A\right)^2 + (z_M - z_A)^2 = (1 + 2t - 1)^2 + (a - a)^2 + \left(a^2 - t - a^2\right)^2 = 5t^2$
$AM = t\sqrt{5}$

On note H le point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite $\mathscr{D}$ orthogonale à $\mathscr{P}$ et passant par le point A. Le point H est appelé projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$ et la distance AH est appelée distance du point A au plan $\mathscr{P}$.



3. Existe-t-il une valeur de a pour laquelle la distance AH du point A de coordonnées $\left(1\ ;\ a\ ;\ a^2\right)$ au plan $\mathscr{P}$ est minimale. Justifier la réponse.

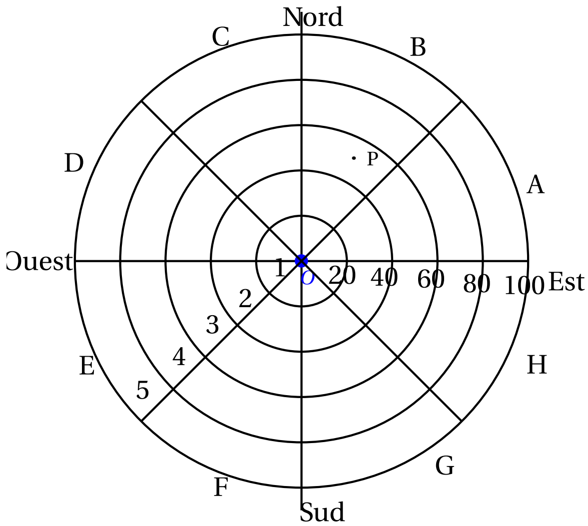
Solution : H est un point de $\mathscr{D}$ donc $AH = t\sqrt{5}$ avec t le paramètre associé à H dans la représentation paramétrique de $\mathscr{D}$
H est un point de $\mathscr{P}$ donc ses coordonnées vérifient $2x_H - z_H - 3 = 0$ et donc le paramètre t associé à H vérifie : $2(1 + 2t) - \left(a^2 - t\right) - 3 = 0 \Longleftrightarrow t = \dfrac{a^2 + 1}{5}$
la distance AH est minimale lorsque t est minimum c'est à dire quand $a^2 = 0$ donc $a = 0$
Finalement $A(1 ; 0 ; 0)$ est le point de $\mathscr{D}$ de coordonnées $(1\ ;\ a\ ;\ a^2)$ pour lequel la distance AH est minimale

EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

Dans une vaste plaine, un réseau de capteurs permet de détecter la foudre et de produire une image des phénomènes orageux. Ces données servent en particulier aux services météorologiques pour améliorer leurs prévisions et pour permettre des interventions plus rapides sur les lieux, notamment en cas d'incendie.

Le but de l'exercice est d'étudier les impacts de foudre détectés par un capteur.
L'écran radar, sur lequel les points d'impact de foudre sont observés, a l'allure suivante :



Le capteur de foudre étant représenté par le centre de l'écran, cinq cercles concentrique correspondant aux rayons respectifs 20, 40, 60, 80 et 100 kilomètres délimitent dans l'ordre cinq zones, numérotées de 1 à 5, définies par leur distance au capteur. De plus, huit segments partant du capteur délimitent huit portions, de même ouverture angulaire, nommées dans le sens trigonométrique de A à H.

L'écran est ainsi partagé en quarante secteurs dénommés par une lettre et un nombre entre 1 et 5. Par exemple, le point P positionné sur la figure est situé dans le secteur B3.

On assimile l'écran radar à une partie du plan complexe en définissant un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ de la manière suivante :

- l'origine O marque la position du capteur;
- l'axe des abscisses est orienté d'Ouest en Est;
- l'axe des ordonnées est orienté du Sud au Nord;
- l'unité choisie est le kilomètre.

Dans la suite, un point de l'écran radar est associé à un point d'affixe z.

PARTIE A

1. On note z_P l'affixe du point P situé dans le secteur B3 sur le graphique précédent. On appelle r le module de z_P et θ son argument dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$.
   Parmi les quatre propositions suivantes, déterminer la seule qui propose un encadrement correct pour r et pour θ (aucune justification n'est demandée) :

Proposition A	**Proposition B**	**Proposition C**	**Proposition D**
$40 < r < 60$ et $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$	$20 < r < 40$ et $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{4}$	$40 < r < 60$ et $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$0 < r < 60$ et $-\frac{\pi}{2} < \theta < -\frac{\pi}{4}$

Solution : P est dans la zone 3 donc $r \in [40\ ;\ 60]$
P est dans la portion B donc $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$
La proposition C est correcte

2. Un impact de foudre est matérialisé sur l'écran en un point d'affixe z. Dans chacun des deux cas suivants, déterminer le secteur auquel ce point appartient :

a. $z = 70\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$;

Solution : $r = |z| = 70$ donc l'impact est dans la zone 4 et $arg(z) = -\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ -\frac{\pi}{3}\right]$
finalement l'impact se situe dans le secteur G4

b. $z = -45\sqrt{3} + 45\mathrm{i}$.

Solution : $z = 45(-\sqrt{3} + \mathrm{i}) \Longrightarrow |z| = 45\left|-\sqrt{3} + \mathrm{i}\right| = 90$ donc $z = 90\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 90\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$
$r = 90$ donc l'impact est dans la zone 5 et $arg(z) = \frac{5\pi}{6} \in \left[\frac{3\pi}{4}\ ;\ \pi\right]$
finalement l'impact se situe dans le secteur D5

Partie B

On suppose dans cette partie que le capteur affiche un impact au point P d'affixe $50\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
En raison d'imprécisions de mesures, le point d'impact affiché ne donne qu'une indication approximative du point d'impact réel de la foudre.
Ainsi, lorsque le capteur affiche le point d'impact P d'affixe $50\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}3$, l'affixe Z du point d'impact réel de la foudre admet :

- un module qui peut être modélisé par une variable aléatoire M suivant une loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart type $\sigma = 5$;
- un argument qui peut être modélisé par une variable aléatoire T suivant une loi normale d'espérance $\frac{\pi}{3}$ et d'écart type $\frac{\pi}{12}$.

On suppose que les variables aléatoires M et T sont indépendantes, c'est-à-dire que, quels que soient les intervalles I et J, les évènements $(M \in 1)$ et $(T \in J)$ sont indépendants.
Dans la suite les probabilités seront arrondies à 10^{-3} près.

1. Calculer la probabilité $P(M<0)$ et interpréter le résultat obtenu.

Solution : $M \hookrightarrow \mathcal{N}(50\,;\,5^2)$
$P(M<0) \approx 0$ donc cela signifie que que l'évènement « $M<0$ » est impossible
remarque : ce n'est pas une surprise : M est un module!

2. Calculer la probabilité $P(M \in]40\,;\,60[)$.

Solution : $P(40<M<60) = P(\mu-2\sigma<M<\mu+2\sigma) \approx 0{,}954$ d'après le cours

3. On admet que $P\left(T \in \left]\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[\right) = 0{,}819$. En déduire la probabilité que la foudre ait effectivement frappé le secteur B3 selon cette modélisation.

Solution : On cherche $P(A\cap B)$ avec $A =$ « $M \in]40\,;\,60[$ » et $B =$ « $T \in \left]\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ »
les variables M et T sont indépendantes donc $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$
$P(A\cap B) = P(40<M<60)\times P\left(T \in \left]\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[\right) = 0{,}954 \times 0{,}819 \approx 0{,}781$

EXERCICE 4 — 5 points

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité
On étudie un modèle de propagation d'un virus dans une population, semaine après semaine. Chaque individu de la population peut être, à l'exclusion de toute autre possibilité :

- soit susceptible d'être atteint par le virus, on dira qu'il est « de type S »;
- soit malade (atteint par le virus);
- soit immunisé (ne peut plus être atteint par le virus).

Un individu est immunisé lorsqu'il a été vacciné, ou lorsqu'il a guéri après avoir été atteint par le virus.

Pour tout entier naturel n, le modèle de propagation du virus est défini par les règles suivantes :

- Parmi les individus de type S en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$: 85 % restent de type S, 5 % deviennent malades et 10 % deviennent immunisés;
- Parmi les individus malades en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$: 65 % restent malades, et 35 % sont guéris et deviennent immunisés.
- Tout individu immunisé en semaine n reste immunisé en semaine $n+1$.

On choisit au hasard un individu dans la population. On considère les évènements suivants :
S_n : « l'individu est de type S en semaine n »;
M_n : « l'individu est malade en semaine n »;
I_n : « l'individu est immunisé en semaine n ».

En semaine 0, tous les individus sont considérés « de type S », on a donc les probabilités suivantes :

$$P(S_0) = 1\,;\ P(M_0) = 0 \text{ et } P(I_0) = 0.$$

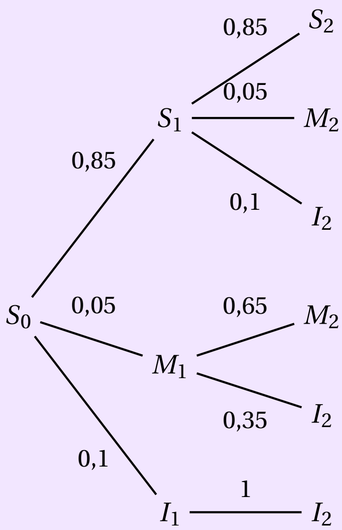
Partie A

On étudie l'évolution de l'épidémie au cours des semaines 1 et 2.

1. Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilités donné ci-dessous :

Solution :

L'énoncé donne :
$P_{S_n}(S_{n+1}) = 0{,}85$
$P_{S_n}(M_{n+1}) = 0{,}05$
$P_{S_n}(I_{n+1}) = 0{,}1$
$P_{S_n}(S_{n+1}) = 0{,}85$
$P_{M_n}(M_{n+1}) = 0{,}65$
$P_{M_n}(I_{n+1}) = 0{,}35$
$P_{I_n}(I_{n+1}) = 1$



2. Montrer que $P(I_2) = 0{,}2025$.

Solution : S_1 , M_1 et I_1 forment une partition de l'univers donc d'après les probabilités totales on a

$$\begin{aligned}P(I_2) &= P(I_2 \cap S_1) + P(I_2 \cap S_M) + P(I_2 \cap I_1)\\ &= P_{S_1}(I_2) \times P(S_1) + P_{M_1}(I_2) \times P(M_1) + P_{I_1}(I_2) \times P(I_1)\\ &= 0{,}1 \times 0{,}85 + 0{,}35 \times 0{,}05 + 1 \times 0{,}1\\ &= 0{,}2025.\end{aligned}$$

3. Sachant qu'un individu est immunisé en semaine 2, quelle est la probabilité, arrondie au millième, qu'il ait été malade en semaine 1 ?

Solution : On cherche $P_{I_2}(M_1)$

$$P_{I_2}(M_1) = \frac{P(M_1 \cap I_2)}{P(I_2)} = \frac{P_{M_1}(I_2) \times P(M_1)}{0{,}2025} = \frac{0{,}0175}{0{,}2025} = \frac{7}{81} \approx 0{,}0864$$

PARTIE B

On étudie à long terme l'évolution de la maladie.
Pour tout entier naturel n, on : $u_n = P(S_n)$, $v_n = p(M_n)$ et $w_n = P(I_n)$ les probabilités respectives des évènements S_n, M_n et I_n.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n + v_n + w_n = 1$.
On admet que la suite (v_n) est définie par $v_0 = 0{,}65v_n + 0{,}05u_n$.

Solution : S_n , M_n et I_n forment une partition de l'univers puisque qu'un individu est soit de type S soit malade soit immunisé à l'exclusion de toute autre possibilité donc $P(S_n) + P(M_n) + P(I_n) = 1$
on a donc bien $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n + v_n + w_n = 1$

2. À l'aide d'un tableur, on a calculé les premiers termes des suites (u_n), (v_n) et (w_n).

	A	B	C	D
1	n	u_n	v_n	w_n
2	0	1	0	0
3	1	0,850 0	0,050 0	0,100 0
4	2	0,722 5	0,075 0	0,202 5
5	3	0,614 1	0,084 9	0,301 0
6	4	0,522 0	0,085 9	0,392 1
7	5	0,443 7	0,081 9	0,474 4
8	6	0,377 1	0,075 4	0,547 4
...	...	...	...	
20	18	0,053 6	0,013 3	0,933 0
21	19	0,045 6	0,011 3	0,943 1
22	20	0,038 8	0,009 6	0,951 6

Pour répondre aux questions a. et b. suivantes, on utilisera la feuille de cacu reproduite ci-dessus.

a. Quelle formule, saisie dans la cellule C3, permet par recopie vers le bas, de calculer les termes de la suite (v_n) ?

Solution : en C3 on a entré « =0,65*C2+0,05B2 »
car $v_{n+1} = 0,65v_n + 0,05u_n$

b. On admet que les termes de (v_n) augmentent, puis diminuent à partir d'une certain rang N, appelé le « pic épidémique » : c'est l'indice de la semaine pendant laquelle la probabilité d'être malade pour un individu choisi au hasard est la plus grande.
Déterminer la valeur du pic épidémique prévue par ce modèle.

Solution : D'après le tableur, le « pic épidémique » est atteint lors de la 4^{e} semaine

3. **a.** Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,85u_n$.
En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Solution : $u_{n+1} = P(S_{n+1})$ or la seule façon d'être de type S à la semaine $(n+1)$ est de l'avoir été à la semaine n donc $P(S_{n+1}) = P_{S_n}(S_{n+1}) \times P(S_n)$
or $P_{S_n}(S_{n+1}) = 0,85$ d'après l'énoncé et $P(S_n) = u_n$
Finalement on a bien $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,85u_n$
On en déduit que (u_n) est géométrique de raison $q = 0,85$ et de premier terme $u_0 = P(S_0) = 1$
on a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0,85^n$

b. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{1}{4}\left(0{,}85^n - 0{,}65^n\right).$$

Solution :
initialisation : pour $n = 0$
$v_0 = P(M_0) = 0$ et $\frac{1}{4}\left(0{,}85^0 - 0{,}65^0\right) = 0$

hérédité : Soit n un entier naturel tel que $v_n = \frac{1}{4}(0{,}85^n - 0{,}65^n)$ alors

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= 0{,}65 v_n + 0{,}05 u_n \\
&= 0{,}65 \times \left(\frac{1}{4}(0{,}85^n - 0{,}65^n)\right) + 0{,}05 \times 0{,}85^n \\
&= \left(0{,}65 \times \frac{1}{4} + 0{,}05\right) \times 0{,}85^n - \frac{1}{4} \times 0{,}65^{n+1} \\
&= \left(0{,}65 \times \frac{1}{4} + 0{,}2 \times \frac{1}{4}\right) \times 0{,}85^n - \frac{1}{4} \times 0{,}65^{n+1} \\
&= \frac{1}{4} \times 0{,}85^{n+1} - \frac{1}{4} \times 0{,}65^{n+1} \\
&= \frac{1}{4} \times \left(0{,}85^{n+1} - 0{,}65^{n+1}\right)
\end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire à partir du rang $n = 0$ or elle est vérifiée à ce rang 0 donc par le principe de récurrence on vient de montrer que
$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{4}(0{,}85^n - 0{,}65^n)$

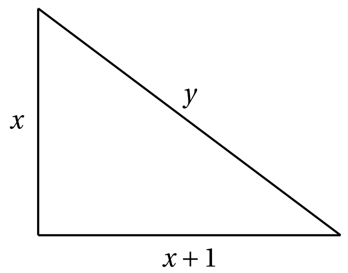
4. Calculer les limites de chacune des suites (u_n), (v_n) et (w_n).
Que peut-on en déduire quant à l'évolution de l'épidémie prévue à long terme par ce modèle ?

Solution : $|0{,}85| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}85^n = 0$ et de même, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}65^n = 0$
On en déduit, par opération sur les limites que
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$
de plus on sait que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n + v_n + w_n = 1$
on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$
Cela signifie qu'à terme, l'épidémie sera éradiquée

EXERCICE IV

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On appelle « triangle rectangle presque isocèle », en abrégé TRPI, un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueurs x et $x+1$, et dont l 'hypoténuse a pour longueur y, où x et y sont des entiers naturels.
Ainsi, un TRPI est un triangle rectangle dont les longueurs des côtés de l'angle droit sont deux nombres entiers consécutifs et dont la longueur de l'hypoténuse est un nombre entier.



Si le triangle de côtés x, $x+1$ et y, où y est la longueur de l'hypoténuse, est un TRPJ, on dira que le couple $(x\,;\,y)$ définit un TRPI.

Partie A

1. Démontrer que le couple d'entiers naturels $(x\,;\,y)$ définit un TRPI si, et seulement si, on a :

$$y^2 = 2x^2 + 2x + 1$$

Solution : D'après le théorème de Pythagore, le triangle est rectangle si et seulement si
$y^2 = x^2 + (x+1)^2$ soit $y^2 = 2x^2 + 2x + 1$

2. Montrer que le TRPI ayant les plus petits côtés non nuls est défini par le couple $(3\,;5)$.

Solution : Pour $x = 1$ on aurait $y = \sqrt{5} \notin \mathbb{N}$
pour $x = 2$ on aurait $y = \sqrt{13} \notin \mathbb{N}$
pour $x = 3$ on aurait $y = 5$ donc le couple $(3\,;5)$ est le plus petit couple d'entiers non nuls $(x\,;\,y)$ tel que le triangle soit un TPRI

3. **a.** Soit n un entier naturel. Montrer que si n^2 est impair alors n est impair.

Solution : Raisonnons par contraposition :
Si n est pair alors il existe un entier naturel k tel que $n = 2k$ et donc $n^2 = 4k^2$ est pair
On en déduit que si n^2 est impair alors n est impair

b. Montrer que dans un couple d'entiers $(x\,;\,y)$ définissant un TRPI, le nombre y est nécessairement impair.

Solution : pour tout entier naturel x, $2(x^2 + x)$ est pair.
on en déduit que si $(x\,;\,y)$ définit un TPRI alors y^2 est nécessairement impair et avec la question qui précède on peut conclure que y est impair

c. Montrer que si le couple d'entiers naturels $(x\,;\,y)$ définit un TRPI, alors x et y sont premiers entre eux.

Solution : Si $(x\,;\,y)$ définit un TPRI alors $y^2 = 2x^2 + 2x + 1$
$y^2 = 2x^2 + 2x + 1 \iff y \times y - (2x+2) \times x = 1$
on a donc $ay + bx = 1$ avec $a = y \in \mathbb{N}$, $b = 2x + 2 \in \mathbb{N}$ alors on peut conclure d'après le théorème de Bezout que x et y sont premiers entre eux

Partie B

On note A la matrice carrée : $A = \begin{pmatrix}3 & 2\\4 & 3\end{pmatrix}$, et B la matrice colonne : $B = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.
Soient x et y deux entiers naturels; on définit les entiers naturels x' et y' par la relation :

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + B.$$

Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

Solution : $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix}3x+2y+1\\4x+3y+2\end{pmatrix}$ on a donc $\begin{cases}x' = 3x+2y+1\\y' = 4x+3y+2\end{cases}$

1. Montrer que : $y'^2 - 2x'(x'+1) = y^2 - 2x(x+1)$.

   Solution :
   $$\begin{aligned}y'^2 - 2x'(x'+1) &= (4x+3y+2)^2 - 2(3x+2y+1)(3x+2y+2)\\&= 16x^2+9y^2+4+24xy+12y+16x-2(9x^2+4y^2+2+12xy+9x+6y)\\&= -2x^2+y^2-2x\\&= y^2-2x(x+1)\end{aligned}$$

2. En déduire que si le couple $(x\ ;\ y)$ définit un TRPI, alors le couple $(x'\ ;\ y')$ définit également un TRPI.

   Solution : Si $(x\ ;\ y)$ définit un TPRI alors $y^2 = 2x^2+2x+1$ soit $y^2-2x^2-2x=1$
   donc si $(x\ ;\ y)$ définit un TPRI alors $y^2-2x(x+1)=1$ donc $y'2-2x'(x'+1)=1$
   or $y'2-2x'(x'+1)=1 \iff y'2=2x'2+2x'+1$
   Finalement si $(x\ ;\ y)$ définit un TPRI alors $(x'\ ;\ y')$ définit un TPRI

   On considère les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels, définies par

   $x_0 = 3,\ y_0 = 5$ et pour tout entier naturel n : $\begin{pmatrix}x_{n+1} & y_{n+1}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix} + B$.

   Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, le couple $(x_n y_n)$ définit un TRPI.

   Solution : Initialisation : pour $n=0$ on sait que $(3\ ;\ 5)$ définit un TPRI d'après la question 2 de la partie A

   Hérédité : soit n un entier naturel tel que $(x_n\ ;\ y_n)$ définisse un TPRI

   alors on sait que $(x_{n+1}\ ;\ y_{n+1})$ défini par $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix} + B$ définit aussi un TPRI d'après la question 2.b. de la partie B
   On en déduit que la propriété est héréditaire à partir du rang $n=0$ or elle est vérifiée à ce rang

   Par le principe de récurrence on vient donc de montrer que
   pour tout entier naturel n, $(x_n\ ;\ y_n)$ définit un TPRI

3. Déterminer, par la méthode de votre choix que vous préciserez, un TRPI dont les longueurs des côtés sont supérieures à 2017.

   Solution : D'après la question 1. de la partie B on a $\begin{cases}x_{n+1} = 3x_n+2y_n+1\\y_{n+1} = 4x_n+3y_n+2\end{cases}$

   On programme les deux suites définies par $\begin{cases}x_0 = 3\\x_{n+1} = 3x_n+2y_n+1\end{cases}$ et $\begin{cases}y_0 = 5\\y_{n+1} = 4x_n+3y_n+2\end{cases}$

on trouve alors $(x_3\ ;\ y_3) = (696\ ;\ 985)$ et $(x_4\ ;\ y_4) = (4\,059\ ;\ 5\,741)$
Donc un triangle dont les côtés mesurent 4 059, 4 060 et 5 741 est un TPRI dont les côtés ont des longueurs supérieurs à 2017.
vérification : $4\,059^2 + 4\,060^2 = 32\,959\,081$ et $5\,741^2 = 32\,959\,081$