

∞ Corrigé du baccalauréat S Métropole–La Réunion ∞
 9 septembre 2015

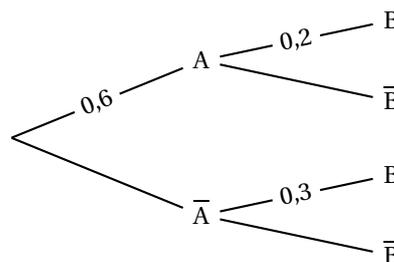
Exercice 1

Commun à tous les candidats

5 points

Question 1

On considère l'arbre de probabilités ci-contre :



Quelle est la probabilité de l'évènement B ?

- a. 0,12 b. 0,2 c. 0,24 d. 0,5

$$P(B) = 0,6 \times 0,2 + (1 - 0,6) \times 0,3 = 0,24$$

Question 2

Le césium 137 est un élément radioactif qui constitue une des principales sources de radioactivité des déchets des réacteurs nucléaires. Le temps T , en années, durant lequel un atome de césium 137 reste radioactif peut être assimilé à une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{\ln 2}{30}$.

Quelle est la probabilité qu'un atome de césium 137 reste radioactif durant au moins 60 ans ?

- a. 0,125 b. 0,25 c. 0,75 d. 0,875

Pour une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ , on sait que $P(X \geq a) = e^{-\lambda a}$.
 Donc $P(T \geq 60) = e^{-\frac{\ln 2}{30} \times 60} = 0,25$

Question 3

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 110$ et d'écart-type $\sigma = 25$.
 Quelle est la valeur arrondie au millièm de la probabilité $P(X \geq 135)$?

- a. 0,159 b. 0,317 c. 0,683 d. 0,841

On peut faire le calcul à la machine ou utiliser le fait que $P(X \geq 135) = P(X \geq \mu + \sigma)$. Et comme on sait que $P(\mu - \sigma) \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,68$, on déduit aisément $P(X \geq \mu + \sigma)$.

Question 4

On lance une pièce de monnaie bien équilibrée 100 fois de suite.
 Lequel des intervalles ci-dessous est un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence d'apparition de la face pile de cette pièce ?

- a. [0,371 ; 0,637] b. [0,480 ; 0,523] c. [0,402 ; 0,598] d. [0,412 ; 0,695]

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence d'apparition de la face pile est $\left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] = [0,402 ; 0,598]$
 Des quatre intervalles proposés, c'est le seul centré sur 0,5.

Question 5

Une entreprise souhaite obtenir une estimation de la proportion de personnes de plus de 60 ans parmi ses clients, au niveau de confiance de 95 %, avec un intervalle d'amplitude inférieure à 0,05. Quel est le nombre minimum de clients à interroger ?

a. 400**b.** 800**c.** 1 600**d.** 3 200

L'intervalle de confiance généralement utilisé est $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ d'amplitude $\frac{2}{\sqrt{n}}$.

$$\frac{2}{\sqrt{n}} < 0,05 \iff \frac{2}{0,05} < \sqrt{n} \iff 1600 < n$$

Exercice 2**Commun à tous les candidats****7 points**

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ telle que : $f(x) = \frac{x}{e^x - x}$

Partie A

Soit la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \int_0^n f(x) dx$.

$$1. I_n = \int_0^n f(x) dx \text{ donc, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, I_{n+1} - I_n = \int_0^{n+1} f(x) dx - \int_0^n f(x) dx = \int_n^{n+1} f(x) dx$$

On admet dans le texte que la fonction f est positive sur $[0; +\infty[$ donc sur $[n; n+1]$; on peut en déduire que $\int_n^{n+1} f(x) dx > 0$ et donc que $I_{n+1} - I_n > 0$ pour tout n .

La suite (I_n) est donc croissante.

$$2. \text{ On admet que pour tout réel } x \text{ de l'intervalle } [0; +\infty[, e^x - x \geq \frac{e^x}{2}.$$

$$a. \text{ Sur } [0; +\infty[, \text{ on sait que } e^x - x \geq \frac{e^x}{2}; \text{ de plus, pour tout } x, e^x - x > 0. \text{ donc } \frac{1}{e^x - x} \leq \frac{2}{e^x}.$$

$$\text{On multiplie cette inégalité par } x \geq 0 \text{ donc : } \frac{x}{e^x - x} \leq \frac{2x}{e^x}$$

$$\text{D'après la positivité de l'intégration : } \int_0^n \frac{x}{e^x - x} dx \leq \int_0^n \frac{2x}{e^x} dx$$

$$\text{ce qui équivaut à } I_n \leq \int_0^n 2xe^{-x} dx$$

$$b. \text{ Soit } H \text{ la fonction définie et dérivable sur l'intervalle } [0; +\infty[\text{ telle que : } H(x) = (-x-1)e^{-x}$$

La fonction H est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables et

$$H'(x) = -1 \times e^{-x} + (-x-1)(-1)e^{-x} = -e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} = xe^{-x}$$

$$c. \text{ On déduit de la question précédente que la fonction } 2H \text{ est une primitive de la fonction } x \mapsto 2xe^{-x}.$$

$$\text{Donc } \int_0^n 2xe^{-x} dx = \left[2(-x-1)e^{-x} \right]_0^n = 2(-n-1)e^{-n} - [2(-1)e^0] = 2 - 2(n+1)e^{-n}$$

$$\text{Pour tout } x, e^x > 0 \text{ donc } 2(n+1)e^{-n} > 0 \text{ donc } 2 - 2(n+1)e^{-n} \leq 2$$

$$\left. \begin{array}{l} I_n \leq \int_0^n 2xe^{-x} dx \\ \int_0^n 2xe^{-x} dx \leq 2 \end{array} \right\} \Rightarrow I_n \leq 2$$

$$3. \text{ La suite } (I_n) \text{ est croissante et majorée par } 2 \text{ donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite } (I_n) \text{ est convergente.}$$

Partie B

$$1. \text{ On fait fonctionner l'algorithme pour } K = 4 \text{ donc pour } h = 0,25 :$$

i	A	x
1	0	0,25
2	0,060	0,5
3	0,169	0,75
4	0,306	1

$$2. \text{ Pour } K = 8, \text{ l'algorithme donne la somme des aires des rectangles hachurés sur le graphique du bas de la page 10.}$$

$$3. \text{ Quand } K \text{ devient grand, l'algorithme donne une valeur approchée par défaut de l'aire du domaine compris entre la courbe } \mathcal{C}, \text{ l'axe des abscisses, et les droites d'équations } x = 0 \text{ et } x = 1 \text{ (voir page 10, le graphique du haut).}$$

Exercice 3

Candidats n'ayant pas suivi la spécialité

5 points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :

— les points $A(0; 1; -1)$ et $B(-2; 2; -1)$.

— la droite \mathcal{D} de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

1. La droite (AB) est l'ensemble des points M de coordonnées $(x; y)$ tels que les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AM} soient colinéaires doc tels que $\overrightarrow{AM} = k \overrightarrow{AB}$ où $k \in \mathbb{R}$.

\overrightarrow{AB} a pour coordonnées $(-2 - 0; 2 - 1; -1 - (-1)) = (-2; 1; 0)$.

\overrightarrow{AM} a pour coordonnées $(x - 0; y - 1; z - (-1)) = (x; y - 1; z + 1)$.

$$\overrightarrow{AM} = k \overrightarrow{AB} \iff \begin{cases} x = -2k \\ y - 1 = k \\ z + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2k \\ y = 1 + k \\ z = -1 \end{cases}$$

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est : $\begin{cases} x = -2k \\ y = 1 + k \\ z = -1 \end{cases}$ où $k \in \mathbb{R}$

2. a. La droite (AB) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(-2; 1; 0)$.

La droite \mathcal{D} a pour vecteur directeur $\vec{v}(1; 1; -1)$.

Les deux vecteurs \overrightarrow{AB} et \vec{v} ne sont pas colinéaires donc les droites (AB) et \mathcal{D} ne sont pas parallèles.

- b. Les droites (AB) et \mathcal{D} sont sécantes si elles admettent un point d'intersection, autrement dit s'il existe un réel t et un réel k tels que

$$\begin{cases} -2 + t = -2k \\ 1 + t = 1 + k \\ -1 - t = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} -2 = -2k \\ 0 = k \\ t = 0 \end{cases} \quad \text{Il n'y a donc pas de solution.}$$

Les droites (AB) et \mathcal{D} ne sont pas sécantes.

Les deux droites n'étant ni parallèles ni sécantes, elles sont non coplanaires.

Dans la suite la lettre u désigne un nombre réel.

On considère le point M de la droite \mathcal{D} de coordonnées $(-2 + u; 1 + u; -1 - u)$.

3. Soit \mathcal{P} le plan d'équation $x + y - z - 3u = 0$.

$$x_M + y_M - z_M - 3u = -2 + u + 1 + u - (-1 - u) - 3u = -2 + u + 1 + u + 1 + u - 3u = 0 \text{ donc } M \in \mathcal{P}$$

Le plan \mathcal{P} a pour vecteur normal $\vec{n}(1; 1; -1)$, qui est un vecteur directeur de la droite \mathcal{D} ; donc le plan \mathcal{P} est orthogonal à la droite \mathcal{D} .

4. Pour déterminer si le plan \mathcal{P} et la droite (AB) sont sécants, on résout le système

$$\begin{cases} x = -2k \\ y = 1 + k \\ z = -1 \\ x + y - z - 3u = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2k \\ y = 1 + k \\ z = -1 \\ -2k + 1 + k + 1 - 3u = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2(2 - 3u) \\ y = 1 + 2 - 3u \\ z = -1 \\ 2 - 3u = k \end{cases} \iff \begin{cases} x = -4 + 6u \\ y = 3 - 3u \\ z = -1 \\ 2 - 3u = k \end{cases}$$

Donc le plan \mathcal{P} et la droite (AB) sont sécants au point $N(-4 + 6u; 3 - 3u; -1)$.

5. a. La droite \mathcal{D} est orthogonale en M au plan \mathcal{P} ; donc la droite \mathcal{D} est perpendiculaire à toute droite du plan \mathcal{P} passant par M , donc elle est perpendiculaire à la droite (MN) contenue dans \mathcal{P} puisque $N \in \mathcal{P}$.

- b. La droite (MN) a pour vecteur directeur \overrightarrow{MN} de coordonnées

$$(-4 + 6u - (-2 + u); 3 - 3u - (1 + u); -1 - (-1 - u)) = (-2 + 5u; 2 - 4u; u).$$

La droite (AB) a pour vecteur directeur \overrightarrow{AB} de coordonnées $(-2; 1; 0)$.

Les droites (MN) et (AB) sont orthogonales si et seulement si le produit scalaire de \overrightarrow{MN} et de \overrightarrow{AB} est nul.

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = (-2 + 5u) \times (-2) + (2 - 4u) \times 1 + u \times 0 = 4 - 10u + 2 - 4u = 6 - 14u$$

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \iff 6 - 14u = 0 \iff \frac{3}{7} = u$$

De plus, les droites (MN) et (AB) sont sécantes en M ; elles sont donc perpendiculaires si et seulement si $u = \frac{3}{7}$.

6. a. $MN^2 = \|MN\|^2 = (-2+5u)^2 + (2-4u)^2 + u^2 = 4 - 20u + 25u^2 + 4 - 16u + 16u^2 + u^2 = 42u^2 - 36u + 8$

b. MN^2 est un trinôme du second degré en u de la forme $au^2 + bu + c$, et le coefficient de u^2 est $a = 42 > 0$; ce polynôme admet donc un minimum pour $u = -\frac{b}{2a} = -\frac{-36}{2 \times 42} = \frac{3}{7}$.

La distance MN est minimale quand le nombre MN^2 est minimal, c'est-à-dire pour $u = \frac{3}{7}$.

Exercice 3**Candidats ayant suivi la spécialité****5 points****Partie A**

On considère l'équation (E) : $15x - 26k = m$ où x et k désignent des nombres entiers relatifs et m est un paramètre entier non nul.

1. $15 = 3 \times 5$ et $26 = 2 \times 13$; les deux nombres 15 et 26 sont donc premiers entre eux. D'après le théorème de Bézout, on peut déduire qu'il existe un couple d'entiers relatifs $(u; v)$ tel que $15u - 26v = 1$.

On cherche un tel couple en utilisant l'algorithme d'Euclide et en écrivant les restes successifs comme combinaisons linéaires de 15 et de 26 :

$$\begin{array}{rcl}
 26 & = & 1 \times 15 + 11 & & -1 \times 15 + 1 \times 26 & = & 11 \\
 15 & = & 1 \times 11 + 4 & & 15 - 1 \times 11 & = & 4 \\
 & & & & 15 - (-1 \times 15 + 1 \times 26) & = & 4 \\
 & & & & 2 \times 15 - 1 \times 26 & = & 4 \\
 11 & = & 2 \times 4 + 3 & & 11 - 2 \times 4 & = & 3 \\
 & & & & (-1 \times 15 + 1 \times 26) - 2(2 \times 15 - 1 \times 26) & = & 3 \\
 & & & & -5 \times 15 + 3 \times 26 & = & 3 \\
 4 & = & 1 \times 3 + 1 & & 4 - 1 \times 3 & = & 1 \\
 & & & & (2 \times 15 - 1 \times 26) - 1(-5 \times 15 + 3 \times 26) & = & 1 \\
 & & & & 7 \times 15 - 4 \times 26 & = & 1
 \end{array}$$

Donc le couple $(7; 4)$ est solution de l'équation $15u - 26v = 1$.

2. $15 \times 7 - 26 \times 4 = 1$ donc $15 \times (7m) - 26 \times (4m) = m$

Le couple $(7m; 4m)$ est une solution particulière de l'équation (E) : $15x - 26k = m$.

3. • On suppose que $15(x - x_0) - 26(k - k_0) = 0$ avec $x_0 = 7m$ et $k_0 = 4m$, donc $15(x - 7m) - 26(k - 4m) = 0$

Alors $15x - 15 \times 7m - 26k + 26 \times 4m = 0$, ce qui implique $15x - 26k = 15 \times 7m - 26 \times 4m$ ou encore $15x - 26k = m$

Donc le couple $(x; k)$ est solution de (E).

- On suppose que $(x; k)$ est solution de (E) : $15x - 26k = m$
 On sait que $(x_0; k_0)$ est une solution de (E) : $15x_0 - 26k_0 = m$
 On soustrait membre à membre : $15(x - x_0) - 26(k - k_0) = 0$
 Donc $15(x - x_0) - 26(k - k_0) = 0$

On peut dire que $(x; k)$ est solution de l'équation (E) si et seulement si $15(x - x_0) - 26(k - k_0) = 0$.

4. • Si le couple $(x; k)$ vérifie le système $\begin{cases} x = 26q + 7m \\ k = 15q + 4m \end{cases}$ où $q \in \mathbb{Z}$, alors :

$$15x - 26k = 15(26q + 7m) - 26(15q + 4m) = 15 \times 26q + 105m - 26 \times 15q - 104m = m.$$

Donc le couple $(x; k)$ est solution de (E).

- Si le couple $(x; k)$ est solution de (E), on sait que $15(x - 7m) - 26(k - 4m) = 0 \iff 15(x - 7m) = 26(k - 4m)$

Donc 15 divise $26(k - 4m)$. Or 15 et 26 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 15 divise $k - 4m$; donc il existe un entier relatif q tel que $k - 4m = 15q$ et donc $k = 15q + 4m$.

$$\left. \begin{array}{l} 15(x - 7m) = 26(k - 4m) \\ k - 4m = 15q \end{array} \right\} \implies 15(x - 7m) = 26 \times 15q \iff x - 7m = 26q \text{ donc } x = 26q + 7m$$

Donc, si $(x; k)$ est solution de l'équation (E), on a : $\begin{cases} x = 26q + 7m \\ k = 15q + 4m \end{cases}$

Les solutions de l'équation (E) sont donc exactement les couples $(x; k)$ d'entiers relatifs tels que :

$$\begin{cases} x = 26q + 7m \\ k = 15q + 4m \end{cases} \text{ où } q \in \mathbb{Z}$$

Partie B

1. On code le mot **MATHS** :

lettre	x	$15x + 7$	reste	lettre
M	12	187	5	F
A	0	7	7	H
T	19	292	6	G
H	7	112	8	I
S	18	277	17	R

Donc le mot **MATHS** se code en **FHGIR**.

2. Soit x le nombre associé à une lettre de l'alphabet à l'aide du tableau initial et y le reste de la division euclidienne de $15x + 7$ par 26.

a. Si y est le reste de la division de $15x + 7$ par 26, cela signifie que $(15x + 7) - y$ est un multiple de 26, donc qu'il existe un entier relatif k tel que $(15x + 7) - y = 26k$, ce qui équivaut à

$$15x - 26k = y - 7$$

b. $15x - 26k = y - 7 \iff 7 \times 15x - 7 \times 26k = 7 \times y - 7 \times 7 \iff 105x - 7 \times 26k = 7y - 49$

$$\left. \begin{array}{l} 105 = 4 \times 26 + 1 \Rightarrow 105 \equiv 1 \pmod{26} \Rightarrow 105x \equiv x \pmod{26} \\ 7 \times 26 \equiv 0 \pmod{26} \Rightarrow 7 \times 26k \equiv 0 \pmod{26} \\ -49 = -2 \times 26 + 3 \equiv 3 \pmod{26} \end{array} \right\} \Rightarrow x \equiv 7y + 3 \pmod{26}$$

c. Voici donc un système de décodage d'une lettre :

- à cette lettre, on associe l'entier y correspondant,
- on associe ensuite à y l'entier x qui est le reste de la division euclidienne de $7y + 3$ par le nombre 26,
- on associe à x la lettre correspondante.

3. On décode les trois lettres W, H et L :

lettre	y	$7y + 3$	reste	lettre
W	22	157	1	B
H	7	52	0	A
L	11	80	2	C

Donc le mot **WHL** se décode en **BAC**.

4. À chaque lettre de l'alphabet, on fait correspondre une seule lettre de l'alphabet par le système de codage décrit dans le texte, celui qui fait passer de la lettre correspondant au nombre entier x à la lettre correspondant au nombre entier y .

Réciproquement, chaque lettre de l'alphabet est l'image d'une unique lettre de l'alphabet que l'on obtient par le système de décodage expliqué à la question 2.c.

Le système de codage réalise donc une bijection sur l'ensemble des lettres de l'alphabet.

Donc deux lettres différentes sont codées par deux lettres différentes.

Exercice 4**Commun à tous les candidats****3 points**

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}(1 + \ln x)$

1. Comme F est une primitive de f , alors f est la dérivée de F donc les variations de F sont données par le signe de f : F est croissante si et seulement si f est positive

C'est donc dans la situation 2 que la courbe C_F est la courbe représentative d'une primitive F de la fonction f .

2. Dans la situation 2, on appelle :

— K le point d'intersection de la courbe \mathcal{C}_f et de l'axe des abscisses et \mathcal{D} la droite passant par K et parallèle à l'axe des ordonnées.

Ce point K a pour abscisse la solution de l'équation $f(x) = 0$ ce qui équivaut à

$$\frac{1}{x}(1 + \ln x) = 0 \iff \ln x = -1 \iff x = e^{-1}.$$

— L le point d'intersection de \mathcal{C}_F et de l'axe des abscisses, ayant une abscisse supérieure à $\frac{1}{2}$ et Δ la droite passant par L et parallèle à l'axe des ordonnées.

L'abscisse du point L est l'abscisse du point en lequel la fonction f atteint son maximum (*voir remarque*), nombre pour lequel la dérivée de f s'annule et passe du positif au négatif.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - (1 + \ln x) \times 1}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2} \text{ s'annule pour } x = 1.$$

Pour $0 < x < 1$, $\ln x < 0$ donc $f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2} > 0$, donc f est croissante.

Pour $1 < x$, $\ln x > 0$ donc $f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2} < 0$, donc f est décroissante.

La fonction f est donc croissante sur $]0; 1]$ puis décroissante sur $[1; +\infty[$; sa dérivée s'annule pour $x = 1$ donc la fonction f admet un maximum pour $x = 1$ et le point L a pour abscisse 1.

Remarque – Il aurait été préférable que le texte précise, par exemple, que l'abscisse du point L était un nombre entier, car rien ne dit dans le texte – hormis le graphique – que le point L a pour abscisse l'abscisse du point en lequel la fonction f atteint son maximum.

- a. L'aire du domaine du plan délimité par les droites \mathcal{D} et Δ , par la courbe \mathcal{C}_f et par l'axe des abscisses a une valeur approchée de 0,5 (aire du rectangle coloré en gris sur le graphique).

- b. La fonction f est positive sur $[e^{-1}; 1]$, donc l'aire du domaine hachuré est $\int_{e^{-1}}^1 f(x) dx$, c'est-à-dire $F(1) - F(e^{-1})$.

- Graphiquement on peut lire que $F(1) = 0$ et que $F(e^{-1}) \approx -0,5$; donc l'aire est approximativement égale à 0,5.

- Pour avoir la valeur exacte de l'aire, il faut déterminer une primitive de f .

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \times \ln x$$

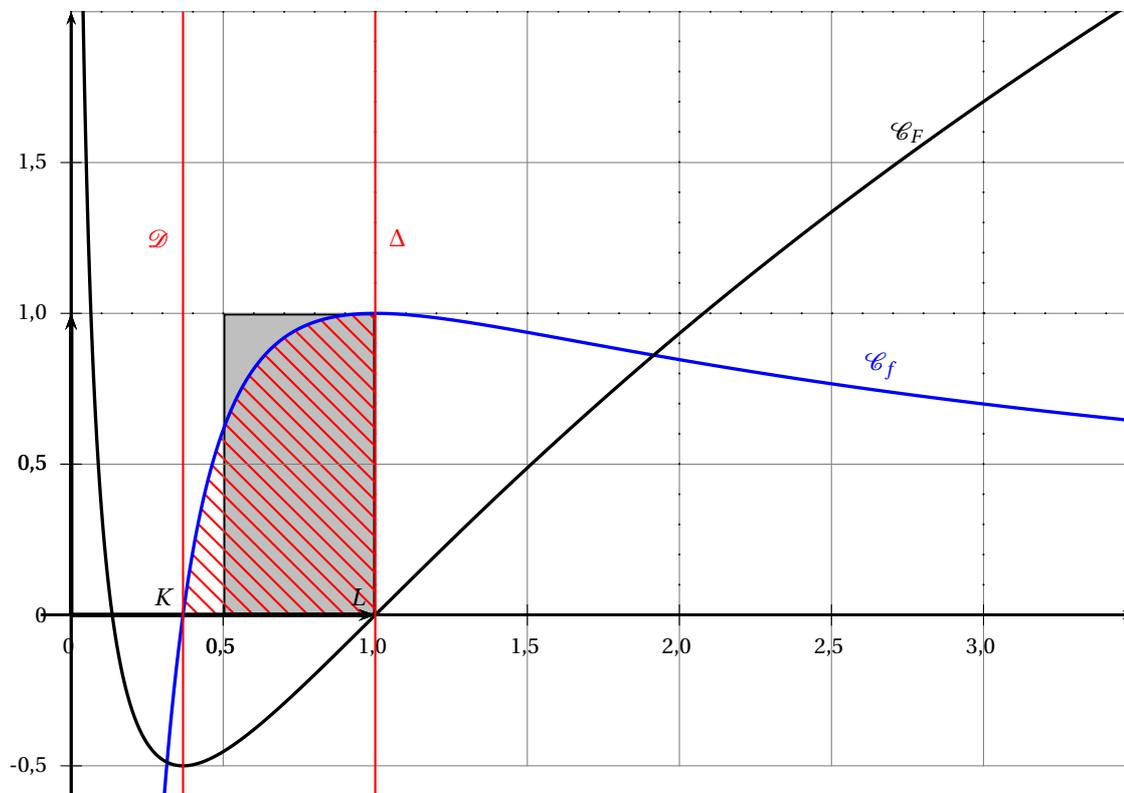
- La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ a pour primitive sur $]0; \infty[$ la fonction $x \mapsto \ln x$.

- La fonction $x \mapsto \frac{1}{x} \times \ln x$ est de la forme $u' u$, où $u(x) = \ln x$, donc a pour primitive $\frac{u^2}{2}$ soit la fonction $x \mapsto \frac{(\ln x)^2}{2}$.

- Donc la fonction f a pour primitive $x \mapsto \ln x + \frac{(\ln x)^2}{2}$.

$$\int_{e^{-1}}^1 f(x) dx = \left[\ln x + \frac{(\ln x)^2}{2} \right]_{e^{-1}}^1 = \left(\ln 1 + \frac{(\ln 1)^2}{2} \right) - \left(\ln e^{-1} + \frac{(\ln e^{-1})^2}{2} \right)$$

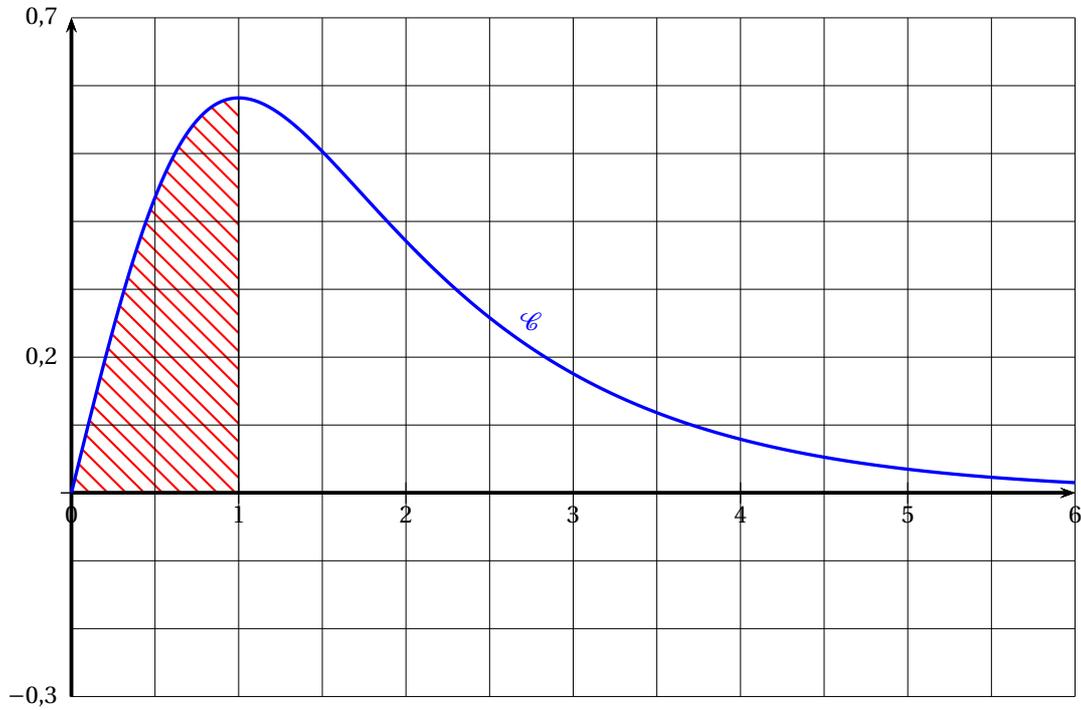
$$\ln 1 = 0 \text{ et } \ln e^{-1} = -1 \text{ donc } \int_{e^{-1}}^1 f(x) dx = 0 - \left(-1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$



ANNEXE Exercice 2

À rendre avec la copie

Courbe \mathcal{C} , représentative de la fonction f sur $[0; 6]$



Courbe \mathcal{C} , représentative de la fonction f sur $[0; 1]$

