Corrigé du baccalauréat S Métropole 23 juin 2009 sujet dévoilé

EXERCICE 1 **4 points**

1. Si la solution est **a.**, les abscisses de A et de B donneraient la même valeur de $t = 0$.
Si la solution est **b.**, l'ordonnée de A donnerait $t = -3$ et la cote serait fausse.
La solution est **c.**. $t = -\frac{1}{2}$ donne les coordonnées de A et $t = 0$ donne les coordonnées de B.
☹ : cette question est piégeuse pour celui ou celle qui cherche l'équation de la droite (AB) et qui ne trouve aucun des trois systèmes !

2. La droite (SS′) est perpendiculaire au plan et coupe ce plan en H projeté orthogonal de S sur ce plan. Le point H appartient à la droite SS′ et au plan, donc ses coordonnées vérifient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+1t \\ y & = & 1+2t \\ z & = & 1+2t \\ x+2y+2z-3 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+1t \\ y & = & 1+2t \\ z & = & 1+2t \\ 2+9t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{7}{9} \\ y & = & \frac{5}{9} \\ z & = & \frac{5}{9} \\ t & = & -\frac{2}{9} \end{array}\right.$$

Le point H est le milieu de SS′ ; on en déduit les coordonnées de $\text{S}'\left(\frac{5}{9}\ ;\ \frac{1}{9}\ ;\ \frac{1}{9}\right)$.
La bonne réponse est **b.**

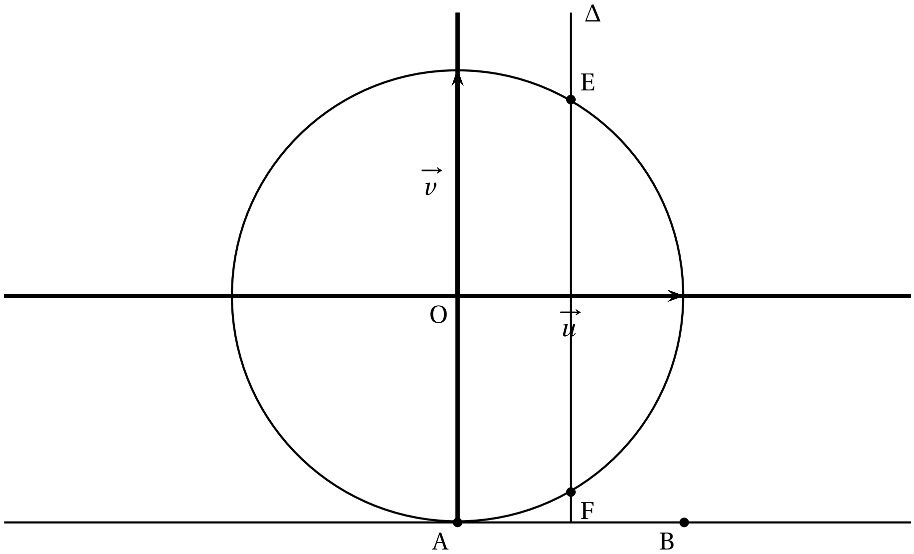
3. On a $\overrightarrow{\text{AB}}\,(0\ ;\ -1\ ;\ 1)$ $\quad\overrightarrow{\text{AC}}\,(8\ ;\ -3\ ;\ -1)$ $\quad\overrightarrow{\text{BC}}\,(8\ ;\ -2\ ;\ 2)$; donc $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{BC}} = 0 \iff$ ABC est un triangle rectangle en en B.
Réponse **c.**

4. Soit G la barycentre du système pondéré $\{(\text{A},\ 1),\ (\text{B},\ -1),\ (\text{C},\ 1)\}$. Par définition
$\overrightarrow{\text{GA}} - \overrightarrow{\text{GB}} + \overrightarrow{\text{GC}} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{\text{OG}} = \overrightarrow{\text{OA}} - \overrightarrow{\text{OB}} + \overrightarrow{\text{OC}}$; on en déduit les coordonnées de G$(9\ ;\ 0\ ;\ -3)$.
En faisant intervenir ce barycentre G dans chaque vecteur, on a :
$\left\|\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}}\right\| = 9 \iff \left\|\overrightarrow{M\text{G}}\right\| = 9 \iff \text{G}M = 9$.
L'ensemble des points est donc une sphère de centre G et de rayon 9.
Il reste à vérifier que S est l'un des points cherchés.
$\overrightarrow{\text{SA}}\,(1\ ;\ 1\ ;\ -2)$, $\overrightarrow{\text{SB}}\,(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$, $\overrightarrow{\text{SC}}\,(8\ ;\ -2\ ;\ -3)$, d'où $\overrightarrow{\text{SA}} - \overrightarrow{\text{SB}} + \overrightarrow{\text{SC}}\,(8\ ;\ -1\ ;\ -4)$. Comme
$\left|\overrightarrow{\text{SA}} - \overrightarrow{\text{SB}} + \overrightarrow{\text{SC}}\right|^2 = 64 + 16 + 1 = 81 = 9^2$.
La norme de ce vecteur est bien égale à 9.
La bonne réponse est **b.**
☹ : Question bien longue !

EXERCICE 2 **5 points**

1. On a $a' = \dfrac{\text{i}(-\text{i}+\text{i})}{\text{i}-1+\text{i}} = 0$. Donc A′ = O.
L'affixe de l'image de O est $\dfrac{\text{i}^2}{-1+\text{i}} = \dfrac{1}{1-\text{i}} = \dfrac{1+\text{i}}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\text{i}$.

2.



3. $z = \dfrac{\mathrm{i}(z+\mathrm{i})}{z-1+\mathrm{i}} = 0 \iff z(z-1+\mathrm{i}) = \mathrm{i}(z+\mathrm{i}) \iff z^2 - z + \mathrm{i}z = \mathrm{i}z - 1 \iff z^2 - z + 1$. Comme $\Delta = 1 - 4 = -3 = \left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2$, cette équation a deux solutions complexes :

$z_1 = z_{\mathrm{E}} = \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et

$z_2 = z_{\mathrm{F}} = \dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

On a $|z_{\mathrm{E}}|^2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} = 1 \iff |z_{\mathrm{E}}| = 1 = |z_{\mathrm{F}}|$.

Ces deux points appartiennent donc au cercle $\mathscr{C}$.

Comme ils ont pour partie réelle $\dfrac{1}{2}$, ces deux points sont les deux points communs à Δ et à $\mathscr{C}$.

4. .Soit

a. $z' = \dfrac{\mathrm{i}(z+\mathrm{i})}{z-1+\mathrm{i}} \Rightarrow \left|z'\right| = \left|\dfrac{\mathrm{i}(z+\mathrm{i})}{z-1+\mathrm{i}}\right| = \dfrac{|\mathrm{i}(z+\mathrm{i})|}{|z-1+\mathrm{i}|} = \dfrac{\mathrm{A}M}{\mathrm{B}M} = \mathrm{O}M'$

b. Application du résultat précédent :

$M \in \Delta \iff M\mathrm{A} = M\mathrm{B}$ et donc $\left|z'\right| = 1 \iff M' \in \mathscr{C}$.

Une équation de la droite (AB) est : $M(x\,;\,y) \in (\mathrm{AB}) \iff y = -1$.

Donc un point M de la droite (AB) a une affixe $z = x - \mathrm{i}$.

D'où $z' = \dfrac{\mathrm{i}(x-\mathrm{i}+\mathrm{i})}{x-\mathrm{i}-1+\mathrm{i}} = \dfrac{x\mathrm{i}}{x-1}$. Donc z' est un imaginaire pur.

Les points M' appartiennent donc à l'axe des ordonnées.

EXERCICE 3 — 6 points

$$f(x) = 1 + x\mathrm{e}^{-x}.$$

Partie A

1. **a.** On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = x\mathrm{e}^{-x} = 0$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

La droite (Δ) est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de plus l'infini.

b. La fonction f est une somme de fonctions dérivables sur $[0\,;\,+$
$infty[$, elle est donc dérivable et :

$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(1-x)$ qui est du signe de $1-x$, puisque $\mathrm{e}^{-x} > 0$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

La dérivée est positive, donc la fonction croissante sur $[0\,;\,1]$ et la dérivée est négative, donc la fonction décroissante sur $[1\,;\,+\infty[$.

2. **a.** On a $f(0) = 1$ et la limite en plus l'infini est égale à 1 : donc $f(x) \geqslant 1 > 0$ sur $[0~;~+\infty[$.
L'intégrale est donc égale à l'aire (en unités d'aire) de la surface limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les verticales d'équations respectives $x = 0$ et $x = t$.

   b. $\displaystyle\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^t 1\,\mathrm{d}t + \int_0^t x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = t + \int_0^t x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$
Cette dernière intégrale se calcule en intégrant par parties :

$$\left\{\begin{array}{l c l} u(x) & = & x\\ v'(x) & = & \mathrm{e}^{-x}\end{array}\right. \text{ et } \left\{\begin{array}{l c l} u'(x) & = & 1\\ v(x) & = & -\mathrm{e}^{-x}\end{array}\right.$$

Toutes ces fonctions sont continues donc intégrables et
$\displaystyle\int_0^t x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_0^t + \int_0^t \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}\right]_0^t = \left[-\mathrm{e}^{-x}(1+x)\right]_0^t = (-1-t)\mathrm{e}^{-t} + 1.$
Conclusion :

$$\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x = t - t\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t} + 1.$$

Partie B

1. $\mathcal{A}(0)$ est égale à l'aire (en unités d'aire) du triangle OIJ. $\mathcal{A}(0) = \dfrac{1\times 1}{2} = \dfrac{1}{2}$.
2. $\mathcal{A}(1)$ est égale à l'intégrale de la fonction f entre 0 et 1.
Donc $\mathcal{A}(1) = 1 - 1\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-1} + 1 = 2 - 2\mathrm{e}^{-1} = 2\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right)$.
3. $M_tN_t\mathrm{I}$ est un triangle rectangle de base $[N_t\mathrm{I}]$ telle que $N_t\mathrm{I} = 1 - t$ et de hauteur $[N_tM_t]$ telle que $N_tM_t = f(t) = 1 + t\mathrm{e}^{-t}$.
$\mathcal{A}\left(M_tN_t\mathrm{I}\right) = \dfrac{(1-t)\left(1+t\mathrm{e}^{-t}\right)}{2}$.
4. On a $\mathcal{A}(t) = \displaystyle\int_0^t f(t)\,\mathrm{d}t + \mathcal{A}\left(M_tN_t\mathrm{I}\right) = t - t\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t} + 1 + \dfrac{(1-t)\left(1+t\mathrm{e}^{-t}\right)}{2} = t - t\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t} + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{t}{2}\mathrm{e}^{-t} - \dfrac{t}{2} - \dfrac{t^2}{2}\mathrm{e}^{-t}$

$$\mathcal{A}(t) = \frac{3}{2} + \frac{t}{2} - \mathrm{e}^{-t}\left(\frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} + 1\right).$$

5. Étudions la fonction $t \longmapsto \mathcal{A}(t) = \dfrac{3}{2} + \dfrac{t}{2} - \mathrm{e}^{-t}\left(\dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t}{2} + 1\right)$
Cette fonction est une somme de produits de fonctions dérivables sur $[0~;~+\infty[$: elle est donc dérivable et sur cet intervalle :
$\mathcal{A}'(t) = \dfrac{1}{2} + \mathrm{e}^{-t}\left(\dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t}{2} + 1 - t - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} + \mathrm{e}^{-t}\left(\dfrac{t^2}{2} - \dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{2}\right)$.
Cette dérivée est du signe de $1 + \mathrm{e}^{-t}\left(t^2 - t + 1\right)$.
Or le trinôme $t^2 - t + 1$ n'a pas de racines réelles ($\Delta = 1 - 4 < 0$) ; il est donc positif.
Quel que soit $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\mathrm{e}^{-t} > 0$, donc $\mathrm{e}^{-t}\left(t^2 - t + 1\right) > 0$ et enfin $1 + \mathrm{e}^{-t}\left(t^2 - t + 1\right) \geqslant 1 > 0$.
Sur $[0~;~1]$, la dérivée est positive et la fonction $\mathcal{A}(t)$ est croissante de $\mathcal{A}(0) = \dfrac{1}{2}$ à $\mathcal{A}(1) = 2\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) \approx 1{,}264\,24$.
Donc $\dfrac{1}{2}\mathcal{A}(1) = 1 - \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}632\,121 > \mathcal{A}(0)$.
La fonction $\mathcal{A}(t)$ étant continue sur $[0~;~1]$, il existe bien un réel unique α tel que
$\mathcal{A}(\alpha) = \dfrac{1}{2} \times \mathcal{A}(1)$.
La calculatrice permet de trouver $\alpha \approx 0{,}139\,93$.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** $u_2 = \dfrac{3}{2} \times 3 - \dfrac{1}{2} \times 0 = \dfrac{9}{2}$;

$u_3 = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{9}{2} - \dfrac{1}{2} \times 3 = \dfrac{27}{4} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{21}{4}$;

$u_4 = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{21}{4} - \dfrac{1}{2} \times \dfrac{9}{2} = \dfrac{63}{8} - \dfrac{9}{4} = \dfrac{45}{8}$.

b. Démonstration par récurrence :

Initialisation : $u_1 = 3 = \dfrac{1}{2} \times u_0 + 3 = \dfrac{1}{2} \times 0 + 3$ est bien vraie ; la relation est vraie au rang 0.

Hérédité : supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ on ait $u_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n + 3$.

Or $u_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n + 3 \iff u_{n+1} - 3 = \dfrac{1}{2} u_n \iff u_n = 2(u_{n+1} - 3) \quad (*)$

On a par définition : $u_{n+2} = \dfrac{3}{2} u_{n+1} - \dfrac{1}{2} u_n = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{2} u_n + 3\right) - \dfrac{1}{2} u_n = \dfrac{1}{4} u_n + \dfrac{9}{2}$;

En utilisant la relation (*), on obtient :

$u_{n+2} = \dfrac{1}{4} \times 2(u_{n+1} - 3) + \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2} u_{n+1}$.

La relation est vraie au rang $n+1$.

La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, elle l'est au rang $n+1$. On a donc démontré par récurrence que pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n + 3$.

c. Cf. figure ci dessous La suite semble être croissante, convergente vers l'ordonnée du point commun aux deux droites c'est-à-dire 6.

2. **a.** $v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \dfrac{1}{2} u_n + 3 - 6 = \dfrac{1}{2} u_n - 3 = \dfrac{1}{2}(u_n - 6) = \dfrac{1}{2} v_n$.

Cette égalité signifie que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 6 = -6$.

b. On sait que pour $v_n = v_0 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = -\dfrac{6}{2^n}$.

c. Comme $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$. De $u_n = v_n + 6$ on en déduit par limite en plus l'infini que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 6.$$

3. Considérons la suite $(w_n - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On a $w_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{1}{2} w_n + 3 - \dfrac{1}{2} u_n - 3 = \dfrac{1}{2}(w_n - u_n)$.

Donc la suite $(w_n - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

Il en résulte que $w_n - u_n = (w_0 - u_0)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = w_0 \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. (1)

On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (w_n - u_n) = 0$.

On a vu que $v_n = u_n - 6 = -\dfrac{6}{2^n} \iff u_n = 6 - \dfrac{6}{2^n} = 6\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$.

Enfin en reprenant l'égalité (1) :

$w_n = u_n + w_0 \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 6\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right) + w_0 \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 6 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (w_0 - 6)$.

Comme par hypothèse $w_0 > 6$, $w_0 - 6 > 0$, donc la suite $\dfrac{w_0 - 6}{2^n}$ est décroissante et donc la suite (w_n) est décroissante.

Les deux suites (u_n) et (w_n) sont :

— l'une croissante,

— l'autre décroissante

— et leur différence tend vers zéro au voisinage de plus l'infini

Les deux suites (u_n) et (w_n) sont adjacentes (et ont donc même limite).

ANNEXE Exercice 4 (à rendre avec la copie)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité