Corrigé du baccalauréat S Métropole Juin 2005

Exercice 1 **4 points**

Partie A : question de cours

Soit u et v deux suites adjacentes avec u croissante et v décroissante.
D'après le résultat (2), on a pour tout entier naturel n :

$$u_0 \leqslant u_1 \leqslant \cdots \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant \cdots \leqslant v_1 \leqslant v_0.$$

En conséquence et d'après le résultat (3) :

— La suite u est croissante et majorée par v_0, donc converge vers le réel ℓ.

— La suite v est décroissante et minorée par u_0, donc converge vers le réel ℓ'.

Pour tout entier naturel n, on a : $u_n = (u_n - v_n) + v_n$
D'après le résultat (1), $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$; un passage à la limite dans l'égalité précédente donne alors :

$$\ell = \ell'.$$

On a démontré que deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite.

Partie B

Pour arriver à faire cet exercice, il faut déjà une idée de la réponse !!!

1. FAUX.
   En effet, considérons la suite u définie pour tout n par : $u_n = \frac{1}{n+1}$
   Alors aucun terme de u_n n'est nul, et u converge vers 0.
   Mais $v_n = \frac{-2}{u_n} = -2(n+1)$, donc v diverge vers $-\infty$.
2. VRAI.
   Si (u_n) est minorée par 2, alors pour tout entier n, on a :
   $$2 \leqslant u_n.$$
   Comme la fonction inverse est décroissante sur $[2\ ;\ +\infty[$, il vient :
   $$\frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{u_n}$$
   En multipliant par -2 :
   $$-1 \leqslant v_n.$$
   Ainsi (v_n) est minorée par -1.
3. FAUX.
   Soit u la suite définie par : $u_n = \frac{1}{n+1}$.
   Cette suite est décroissante (avec aucun terme nul) et la suite v définie par $v_n = \frac{-2}{u_n} = -2(n+1)$ est décroissante non constante, donc on ne peut pas dire qu'elle soit croissante.
4. FAUX.
   Rappelons qu'une suite est divergente si elle n'est pas convergente.
   Donc soit elle tend vers $\pm\infty$, soit elle n'a pas de limite.
   Pour construire un contre-exemple, il suffit de trouver une suite (u_n) qui diverge mais sans tendre vers l'infini.
   Par exemple :
   $$u_n = -2(-1)^n \text{ donc } v_n = (-1)^n.$$
   Comme la suite de terme général $(-1)^n$ diverge alors u et v divergent.

Preuve de la divergence de la suite de terme général (-1) :

Raisonnons par l'absurde et supposons que cette suite converge vers un réel ℓ.

Alors tout intervalle ouvert centré en ℓ contient tous les termes $(-1)^n$ à partir d'un certain rang.

Ainsi il existe un rang N à partir duquel on aura :

$$\begin{aligned}(-1)^n \in]\ell - \frac{1}{2} ; \ell + \frac{1}{2}[\quad &\iff \quad \ell - \frac{1}{2} < (-1)^n < \ell + \frac{1}{2}\\ &\iff \quad -(-1)^n - \frac{1}{2} < -\ell < \frac{1}{2} - (-1)^n\\ &\iff \quad -\left(-(-1)^n - \frac{1}{2}\right) > \ell > -\left(\frac{1}{2} - (-1)^n\right)\\ &\iff \quad (-1)^n - \frac{1}{2} < \ell < (-1)^n + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Mais si n pair, $(-1)^n = 1$, donc l'encadrement donne $\quad \frac{1}{2} < \ell < \frac{3}{2}$

Mais si n impair, $(-1)^n = -1$, donc l'encadrement donne $\quad -\frac{3}{2} < \ell < -\frac{1}{2}$

Mais on ne peut avoir simultanément $\frac{1}{2} < \ell < \frac{3}{2}$ et $-\frac{3}{2} < \ell < -\frac{1}{2}$, on aboutit à une contradiction.

Ainsi la supposition : « la suite de terme général $(-1)^n$ converge vers un réel ℓ » est fausse.

Donc la suite de terme général $(-1)^n$ diverge.

Exercice 2 **5 points**

1. Le cercle $\mathscr{C}$ est de diamètre [OA], il est donc de centre le milieu I de [OA], d'affixe $\frac{1}{2}$, et de rayon $\frac{1}{2}$.
Donc $\mathrm{M} \in \mathscr{C} \iff IM = \frac{1}{2}$, c'est à dire :

$$\left|m - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

2. Comme le carré MKLO est direct, alors L est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, donc :

$$l = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}(m - 0) + 0 = \mathrm{i}m$$

De même le carré MAPN est direct, alors P est l'image de M par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$, donc :

$$p = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}(m - 1) + 1 = -\mathrm{i}(m - 1) + 1 = -\mathrm{i}m + 1 + \mathrm{i}.$$

On admettra que l'on a également $n = (1 - \mathrm{i})m + \mathrm{i}$ et $k = (1 + \mathrm{i})m$.

3. **a.** Le milieu Ω du segment [PL] a pour affixe

$$\frac{p + l}{2} = \frac{-\mathrm{i}m + 1 + \mathrm{i} + \mathrm{i}m}{2} = \frac{1 + \mathrm{i}}{2}.$$

Son affixe étant indépendante de m, alors Ω est un point indépendant de la position du point M sur le cercle $\mathscr{C}$.

b. En référence, à la relation de la question 1., nous avons :

$$\begin{aligned}\left|\frac{1 + \mathrm{i}}{2} - \frac{1}{2}\right| \quad &= \quad \left|\frac{\mathrm{i}}{2}\right|\\ &= \quad \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Donc le point Ω appartient au cercle $\mathscr{C}$.
De plus, comme Ω est sur la droite $x = \frac{1}{2}$, médiatrice de [OA], Ω est le « milieu » de l'arc de cercle supérieur OA.

4. a.

$$\begin{aligned}
KN &= |n-k| \\
&= |(1-\mathrm{i})m+\mathrm{i}-((1+\mathrm{i})m)| \\
&= |-2\mathrm{i})m+\mathrm{i}| \\
&= |-2\mathrm{i}| \underbrace{\left|m-\frac{1}{2}\right|}_{=\frac{1}{2}\text{question 1.}} \\
&= 2\times\frac{1}{2}=1
\end{aligned}$$

Ainsi la distance KN est constante.

b. On conjecture que ce triangle ΩNK est rectangle isocèle en Ω. Démontrons-le en montrant que K est l'image de N par la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\left(n-\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right)+\frac{1+\mathrm{i}}{2} &= \mathrm{i}\left((1-\mathrm{i})m+\mathrm{i}-\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right)+\frac{1+\mathrm{i}}{2} \\
&= \mathrm{i}\,((1-\mathrm{i})m+\mathrm{i})-\mathrm{i}\frac{1+\mathrm{i}}{2}+\frac{1+\mathrm{i}}{2} \\
&= \mathrm{i}\,((1-\mathrm{i})m+\mathrm{i})+\frac{1-\mathrm{i}}{2}+\frac{1+\mathrm{i}}{2} \\
&= (1+\mathrm{i})\,m-1+\frac{1-\mathrm{i}}{2}+\frac{1+\mathrm{i}}{2} \\
&= (1+\mathrm{i})\,m=k
\end{aligned}$$

CQFD.

5. Comme le triangle ΩNK est rectangle isocèle en Ω, alors en utilisant le théorème de Pythagore :

$$2\Omega N^2 = KN^2 = 1 \iff \Omega N = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ainsi le point N appartient au cercle fixe (indépendant du point M) de centre Ω et de rayon $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 3 **5 points**

1. a. Comme l'enfant tire simultanément les boules, il n' y a pas de première boule, ni de deuxième, etc., donc il y a un choix de trois boules parmi 13, c'est à dire qu'il y a $\binom{13}{3} = 286$ tirages au hasard possibles.
La variable aléatoire X prend les valeurs 0, 1, 2 et 3, et de plus, pour obtenir :
• $X = 0$, il faut et il suffit que l'enfant choisisse 3 boules vertes parmi les 3, donc :

$$P(X=0) = \frac{1}{286}.$$

• $X = 1$, il faut et il suffit que l'enfant choisisse 1 boule rouge parmi 10 et à chacun de ces tirages de cette boule rouge il y a un tirage de 2 boules vertes parmi les 3, donc :

$$P(X = 1) = \frac{\binom{10}{1} \times \binom{3}{2}}{286} = \frac{30}{286}.$$

• $X = 2$, il faut et il suffit que l'enfant choisisse 2 boules rouge parmi 10 et à chacun de ces tirages de ces boules rouges il y a un tirage de 1 boules verte parmi les 3, donc :

$$P(X = 2) = \frac{\binom{10}{2} \times \binom{3}{1}}{286} = \frac{135}{286}.$$

• $X = 3$, il faut et il suffit que l'enfant choisisse 3 boule rouge parmi 10, donc :

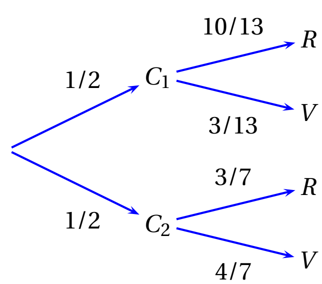
$$P(X = 3) = \frac{\binom{10}{3}}{286} = \frac{120}{286}.$$

Remarquez bien que $\sum_{k=0}^{k=3} P(X = k) = 1$, ce qui permet de s'assurer que notre raisonnement est cohérent à défaut d'être bon.

b. L'espérance mathématique de X est $E(X) = \sum_{k=0}^{k=3} k \times P(X = k) = 2{,}307$.

PS : Attention de bien respecter les consignes d'arrondi données en préambule.

2. a.



b. D'après les formules des probabilités totales, on a :

$$\begin{array}{rcl} P(R) & = & P(R \cap C_1) + P(R \cap C_2) \\ & = & \frac{1}{2} \times \frac{10}{13} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{7} \\ & = & \frac{109}{182} \approx 0{,}598 \end{array}$$

c. Sachant que l'enfant a choisi une bille rouge, la probabilité qu'elle provienne de la boîte cubique est :

$$P(C_1/R) = \frac{P(C_1 \cap R)}{P(R)} = 0{,}642$$

3. Comme l'enfant reproduit n fois de suite son deuxième jeu, en remettant à chaque fois la bille tirée à sa place, le jeu est répétée de manière indépendante.

a. La probabilité p_n que l'enfant ait pris au moins une bille rouge au cours de ses n choix est, en passant à l'évènement contraire : $1 - P$ (aucune boule rouge). Or, compte tenu de l'indépendance, la probabilité de n'avoir aucune boule rouge est :

$$P\left(\overline{R}\right) \times P\left(\overline{R}\right) \times P\left(\overline{R}\right) \cdots P\left(\overline{R}\right) = P\left(\left(\overline{R}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{109}{182}\right)^n = \left(\frac{73}{182}\right)^n$$

Donc,

$$p_n = 1 - \left(\frac{73}{182}\right)^n$$

b. Pour calculer la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n \geqslant 0,99$, résolvons :

$$\begin{aligned}
p_n \geqslant 0,99 &\iff 1 - \left(\frac{73}{182}\right)^n \geqslant 0,99\\
&\iff 1 - \left(\frac{73}{182}\right)^n \geqslant 0,99\\
&\iff \left(\frac{73}{182}\right)^n \leqslant 0,01\\
&\iff \ln\left(\frac{73}{182}\right)^n \leqslant \ln 0,01\\
&\iff n\ln\left(\frac{73}{182}\right) \leqslant \ln 0,01\\
&\iff n \geqslant \frac{\ln 0,01}{\ln\left(\frac{73}{182}\right)}\\
&\iff n \geqslant 5,04
\end{aligned}$$

Donc la valeur minimale est $n = 6$

Exercice 4 **6 points**

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3e^{\frac{x}{4}}}{2 + e^{\frac{x}{4}}}.$$

a.

$$\begin{aligned}
\frac{3}{1 + 2e^{-\frac{x}{4}}} &= \frac{3}{1 + 2 \times \frac{1}{e^{\frac{x}{4}}}}\\
&= \frac{3}{\frac{e^{\frac{x}{4}} + 2}{e^{\frac{x}{4}}}}\\
&= \frac{3e^{\frac{x}{4}}}{2 + e^{\frac{x}{4}}}\\
&= f(x)
\end{aligned}$$

b. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{x}{4} = -\infty$ et $\lim\limits_{y \to -\infty} e^y = 0$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\frac{x}{4}} = 0$, donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3}{1 + 2e^{-\frac{x}{4}}} = 3 \iff \lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$$

Par un raisonnement analogue, on obtient

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0.$$

c . La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}$, composée des fonctions dérivables : exp et $x \mapsto -\frac{x}{4}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = 3 \times (-1) \times 2\frac{-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}}{\left(1+2\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}\right)^2} = \frac{3}{2} \times \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}}{\left(1+2\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}\right)^2}.$$

Comme pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}} > 0$, alors $f'(x) > 0$. Ainsi f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Partie B

1. **a.** Les solutions de l'équation différentielle (E_1) : $y' = \frac{y}{4}$ sont les fonctions y définies par :

$$y(t) = K\mathrm{e}^{\frac{t}{4}}$$

avec K constante réelle.

b. Comme g est une solution de l'équation différentielle (E_1), alors $g(t) = K\mathrm{e}^{\frac{t}{4}}$.
Donc $g(0) = K\mathrm{e}^{\frac{0}{4}} = K$ or $g(0) = 1$ donc $K = 1$.
Ainsi

$$g(t) = \mathrm{e}^{\frac{t}{4}}$$

c. La population dépassera 300 rongeurs pour la première fois lorsque

$$\begin{aligned} g(t) \geqslant 3 \quad &\iff \quad \mathrm{e}^{\frac{t}{4}} \geqslant 3 \\ &\iff \quad \ln\left(\mathrm{e}^{\frac{t}{4}}\right) \geqslant \ln 3 \\ &\iff \quad \frac{t}{4} \geqslant \ln 3 \\ &\iff \quad t \geqslant 4\ln 3 \end{aligned}$$

2. **a.** Considérons une fonction u strictement positive vérifiant la condition (E_2), alors on a :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u'(t) &=& \frac{u(t)}{4} - \frac{[u(t)]^2}{12} \text{ pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ u(0) &=& 1. \end{array}\right.$$

Intéressons-nous à la fonction h définie et dérivable sur $[0 ; +\infty[$, vérifiant $h(t) = \frac{1}{u(t)}$. Alors :
$h(0) = \frac{1}{u(0)} = \frac{1}{1} = 1$ et $h'(t) = -\frac{u'(t)}{u^2(t)}$.
Mais $u'(t) = \frac{u(t)}{4} - \frac{[u(t)]^2}{12}$ et $u(t) > 0$, donc, en divisant par $-u^2(t)$ l'égalité précédente, on obtient :

$$-\frac{u'(t)}{u^2(t)} = -\frac{u(t)}{4u^2(t)} - \frac{[u(t)]^2}{12u^2(t)} \iff -\frac{u'(t)}{u^2(t)} = -\frac{1}{4}\frac{1}{u(t)} - \frac{1}{12}.$$

C'est-à-dire :

$$h'(t) = -\frac{1}{4}h(t) + \frac{1}{12}.$$

Ainsi la fonction h satisfait aux conditions

$$(\mathrm{E}_3)\left\{\begin{array}{lcl} h'(t) &=& -\frac{1}{4}h(t) + \frac{1}{12} \text{ pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ h(0) &=& 1. \end{array}\right.$$

Comme nous avons procédé par équivalence, la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si et seulement si la fonction h satisfait aux conditions (E_3).

b. Les solutions de l'équation différentielle $y' = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{12}$ sont les fonctions y définies par :

$$y(t) = C\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} - \frac{\frac{1}{12}}{-\frac{1}{4}} = C\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} + \frac{1}{3}$$

.

Ainsi $h(t) = C\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} + \frac{1}{3}$, or $h(0) = 1$ donc $C\mathrm{e}^{-\frac{0}{4}} + \frac{1}{3} = 1 \iff C = \frac{2}{3}$ donc

$$h(t) = \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(2\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} + 1\right)$$

Or

$$u(t) = \frac{1}{h(t)} \text{ donc } u(t) = \frac{1}{\frac{1}{3}\left(2\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} + 1\right)} = \frac{3}{2\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} + 1}.$$

c. Dans ce modèle, la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$ s'approche de 3.

Ce calcul a été effectué dans la partie A.

Corrigé : Patrick Baril