

**Corrigé du baccalauréat TS Métropole–La Réunion**   
**22 juin 2018**

**EXERCICE 1**

1. La largeur de l'arc de chaînette est égal à  $2x$  et sa hauteur est égale à  $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - 2)$ .

Le problème étudié revient à résoudre l'équation  $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - 2) = 2x$

$$\frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - 2) = 2x \iff e^x + e^{-x} - 2 = 4x \iff e^x + e^{-x} - 2 - 4x = 0$$

2. a. Pour  $x > 0$ ,  $x\left(\frac{e^x}{x} - 4\right) = x \times \frac{e^x}{x} - 4x = e^x - 4$  donc  $f(x)$  peut bien s'écrire sous la forme proposée.

b.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$  par croissance comparée, donc par somme puis produit,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 4\right) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

Par somme, on obtient  $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$

3. a.  $\boxed{f'(x) = e^x - e^{-x} - 4}$

b.  $f'(x) = 0 \iff e^x - \frac{1}{e^x} - 4 = 0 \iff \frac{(e^x)^2 - 4e^x - 1}{e^x} = 0 \iff (e^x)^2 - 4e^x - 1 = 0.$

c. Si on pose  $X = e^x$  alors  $(e^x)^2 - 4e^x - 1 = 0 \iff X^2 - 4X - 1 = 0$

$\Delta = 16 - 4 \times 1 \times (-1) = 16 + 4 = 20 > 0$  donc l'équation admet deux solutions :

$$X_1 = \frac{4 - \sqrt{20}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{5}}{2} = 2 - \sqrt{5} \approx -0,24 < 0 \text{ et } X_2 = 2 + \sqrt{5} \approx 4,24 > 0$$

$e^x = 2 - \sqrt{5}$  n'a pas de solution car  $e^x > 0$  et  $e^x = 2 + \sqrt{5} \iff x = \ln(2 + \sqrt{5})$ .

Donc  $f'(x)$  s'annule pour une seule valeur égale à  $\ln(2 + \sqrt{5})$

4. a. On obtient le tableau de variations suivant :

$x$	0	$\ln(2 + \sqrt{5})$	$+\infty$
$f(x)$	0	$f(\ln(2 + \sqrt{5}))$	$+\infty$

avec  $f(0) = 1 + 1 - 0 - 2 = 0$   
 et  $f(\ln(2 + \sqrt{5})) \approx -3,3$

b. — Sur  $]0; \ln(2 + \sqrt{5})]$ ,  $f(x) < 0$  donc l'équation  $f(x) = 0$  n'a pas de solution.

— Sur  $[\ln(2 + \sqrt{5}); +\infty[$ ,  $f$  est continue et strictement croissante.

$$0 \in [f(\ln(2 + \sqrt{5})); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] \text{ car } f(\ln(2 + \sqrt{5})) \approx -3,3 < 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation admet une unique solution  $\alpha$ .

5. a.

$m$	$a$	$b$	$b - a$	$f(m)$
	2	3	1	
2,5	2	2,5	$0,5 > 0,1$	$\approx 0,26 > 0$
2,25	2,25	2,5	$0,25 > 0,1$	$\approx -1,4 < 0$
2,375	2,375	2,5	$0,125 > 0,1$	$\approx -0,66 < 0$
2,4375	2,4375	2,5	$0,0625 < 0,1$	$\approx -0,22 < 0$

b. Grâce à cet algorithme, on obtient un encadrement de  $\alpha$  :  $2,4375 < \alpha < 2,5$

$$6. e^{\frac{t}{39}} + e^{-\frac{t}{39}} - 4\frac{t}{39} - 2 = 0 \iff e^x + e^{-x} - 4x - 2 = 0 \text{ avec } x = \frac{t}{39}$$

Cette équation a une unique solution  $\alpha$  et  $\alpha = \frac{t}{39} \iff t = 39\alpha$  donc la largeur de l'arche est  $2t = 78\alpha$

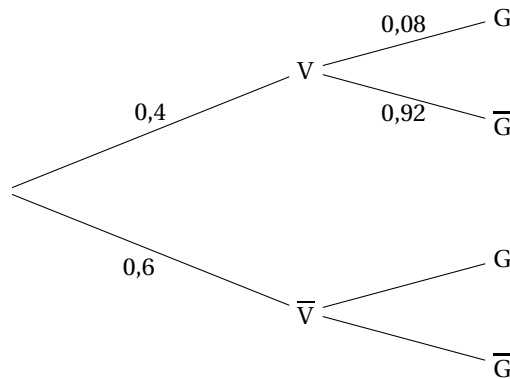
$$2,4375 < \alpha < 2,5 \iff 190,125 < 78\alpha < 195$$

donc la largeur de l'arche est comprise entre 190 et 195 mètres.

## EXERCICE 2

### Partie A

1. a.  $P(G) = 0,2$  car 20% de la population a contracté la grippe.  
b. On obtient :



2. On calcule  $P(G \cap V) = 0,4 \times 0,08 = 0,032$  soit 3,2% de chances que la personne ait contracté la grippe et soit vaccinée.

3. On calcule  $P_{\bar{V}}(G) = \frac{P(\bar{V} \cap G)}{P(\bar{V})}$

D'après la formule des probabilités totales,  $P(V \cap G) + P(\bar{V} \cap G) = P(G)$

$$\text{donc } P(\bar{V} \cap G) = P(G) - P(V \cap G) = 0,2 - 0,032 = 0,168 \text{ puis } P_{\bar{V}}(G) = \frac{0,168}{0,6} = 0,28.$$

### Partie B

1. Il s'agit de  $n$  expériences aléatoires identiques et indépendantes à 2 issues (la personne est vaccinée ou non) avec une probabilité de succès de 0,4.

La variable aléatoire  $X$  compte le nombre de succès donc  $X$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(n; 0,4)$ .

2. Avec la loi  $\mathcal{B}(40; 0,4)$

- a.  $P(X = 15) \approx 0,123$

- b.  $P(X \geq 20) = 1 - P(X < 20) = 1 - P(X \leq 19) \approx 0,130$

3. On calcule  $P(1450 < X < 1550) = P\left(\frac{1450 - 1500}{30} < Z < \frac{1550 - 1500}{30}\right) = P\left(\frac{-5}{3} < Z < \frac{5}{3}\right) \approx 0,904$

## EXERCICE 3

### Partie A

1.
  - a.  $(EA) \perp (ABC)$  donc  $(EA)$  est la hauteur issue de E dans le tétraèdre ABCE.  
 $(CB) \perp (ABE)$  donc  $(CB)$  est la hauteur issue de C dans le tétraèdre ABCE.
  - b. Les droites  $(EA)$  et  $(BC)$  sont non coplanaires donc non sécantes.  
 Avec deux hauteurs non sécantes, il est impossible d'avoir 4 hauteurs concourantes!
2.
  - a.  $x - y + z = 0$  est bien l'équation cartésienne d'un plan donc je vérifie que les points A, C et H appartiennent bien à ce plan :  
 $A(0; 0; 0)$  donc  $x_A - y_A + z_A = 0$   
 $C(1; 1; 0)$  donc  $x_C - y_C + z_C = 1 - 1 - 0 = 0$   
 $H(0; 1; 1)$  donc  $x_H - y_H + z_H = 0 - 1 + 1 = 0$
  - b.  $F(1; 0; 1)$  et  $D(0; 1; 0)$  donc  $\overrightarrow{DF}(1; -1; 1)$  qui est bien un vecteur normal au plan d'après les coefficients de l'équation cartésienne donc  $(FD) \perp (ACH)$  puis  $(FD)$  est bien la hauteur issue de F du tétraèdre ACHF.
  - c. Par analogie, on en déduit que  $(AG)$  est la hauteur issue de A,  $(CE)$  est la hauteur issue de H et  $(HB)$  est la hauteur issue de H.  
 D'après l'énoncé, les 4 hauteurs correspondent aux « grandes diagonales » du cube et sont donc concourantes.

**Partie B**

1.
  - a.  $(MK)$  est orthogonale au plan  $(NPQ)$  donc d'après le théorème de la porte,  $(MK)$  est orthogonale à toute droite de ce plan; en particulier,  $(MK) \perp (PQ)$ .
  - b. On a montré que  $(PQ)$  est orthogonale à  $(NK)$  et  $(MK)$  qui sont deux droites sécantes du plan  $(MNK)$  donc par définition,  $(PQ)$  est orthogonale au plan  $(MNK)$ .
2.  $(PQ)$  est orthogonale au plan  $(MNK)$  donc d'après le théorème de la porte,  $(PQ)$  est orthogonale à toute droite de ce plan; en particulier,  $(PQ) \perp (MN)$ .

**Partie C**

$$\overrightarrow{RS}(4; -1; -4) \quad \overrightarrow{ST}(3; -5; 7) \quad \overrightarrow{TU}(0; 8; -2) \quad \overrightarrow{RU}(7; 2; 1) \quad \overrightarrow{RT}(7; -6; 3) \quad \overrightarrow{SU}(3; 3; 5)$$

$$\overrightarrow{ST} \cdot \overrightarrow{RU} = 3 \times 7 + (-5) \times 2 + 7 \times 1 = 21 - 10 + 7 \neq 0 \text{ donc } (ST) \text{ n'est pas orthogonale à } (TU).$$

Avec deux arêtes opposées non orthogonales, ce tétraèdre n'est pas orthocentrique.

**EXERCICE 4 OBLIGATOIRE**

$$1. \quad a. \quad \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4} - i \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3 - i\sqrt{3}}{4}$$

$$b. \quad z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}} z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}} \times 8 \text{ donc } \boxed{z_1 = 4\sqrt{3} e^{-i\frac{\pi}{6}}}$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}} z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}} \times 4\sqrt{3} e^{-i\frac{\pi}{6}} = 6 e^{-i\frac{2\pi}{6}} \text{ donc } \boxed{z_2 = 6 e^{-i\frac{\pi}{3}}}$$

$$z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}} z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}} \times 6 e^{-i\frac{\pi}{3}} = 3\sqrt{3} e^{-i\frac{3\pi}{6}} \text{ donc } \boxed{z_3 = 3\sqrt{3} e^{-i\frac{\pi}{2}}}$$

$\arg(z_3) = \frac{-\pi}{2}$  donc  $z_3$  est un imaginaire pur dont la partie imaginaire est négative et

$$\boxed{\operatorname{Im}(z_3) = -3\sqrt{3}}$$

c. FIGURE

2.
  - a. *Initialisation*  $z_0 = 8 \times 1 \times 1 = 8$  donc la propriété est vraie pour  $n = 0$ .

*Hérédité* : On suppose que pour  $n \geq 0$ ,  $z_n = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{-i\frac{n\pi}{6}}$  et on va montrer que

$$z_{n+1} = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} e^{-i\frac{(n+1)\pi}{6}}$$

On a  $z_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} z_n = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}} \times 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{-i\frac{n\pi}{6}}$  (par hypothèse de récurrence).

Donc  $z_{n+1} = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} e^{-i\frac{(n+1)\pi}{6}}$  (en utilisant la propriété  $a^n \times a = a^{n+1}$  pour tout nombre réel  $a$ ).

Donc la propriété est héréditaire.

La propriété est vraie au rang 0, et si elle est vraie au rang  $n \geq 0$ , elle l'est aussi au rang  $n+1$

Conclusion : d'après le principe de récurrence la propriété est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

b. On a donc  $u_n = |z_n| = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$

Il s'agit d'une suite géométrique de premier terme  $u_0 = 8$  et de raison  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

$0 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0$  puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 8 \times 0 = 0$

3. a. 
$$\frac{z_{k+1} - z_k}{z_{k+1}} = \frac{\frac{3-i\sqrt{3}}{4} z_k - z_k}{\frac{3-i\sqrt{3}}{4} z_k} = \frac{\cancel{z_k} \left(\frac{3-i\sqrt{3}}{4} - 1\right)}{\cancel{z_k} \frac{3-i\sqrt{3}}{4}} = \frac{3-i\sqrt{3}-4}{3-i\sqrt{3}} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}} \times \frac{4}{4} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}}$$

On multiplie par le conjugué du dénominateur :

$$\frac{z_{k+1} - z_k}{z_{k+1}} = \frac{(-1-i\sqrt{3})(3+i\sqrt{3})}{(3-i\sqrt{3})(3+i\sqrt{3})} = \frac{-3-i\sqrt{3}-3i\sqrt{3}+3}{9+3} = \frac{-4i\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{12 \times \sqrt{3}} = \frac{-12i}{12\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}i$$

On a donc  $\left| \frac{z_{k+1} - z_k}{z_{k+1}} \right| = \left| -\frac{1}{\sqrt{3}}i \right| \iff \frac{|z_{k+1} - z_k|}{|z_{k+1}|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \iff \frac{A_k A_{k+1}}{OA_{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \iff$

$$A_k A_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} OA_{k+1}.$$

b. D'après la question précédente, pour tout entier naturel  $k$ ,

$$A_k A_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} OA_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} |z_{k+1}| = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k+1} = \frac{8}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k+1}$$

Donc  $\ell_n = \frac{8}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^1 + \frac{8}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \dots + \frac{8}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \frac{8}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^1 + \dots + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}\right)$

Puis  $\ell_n = 4 \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = 4 \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}} = \frac{8}{2 - \sqrt{3}} \times \left(1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right)$

Pour finir,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n = \frac{8}{2 - \sqrt{3}} (1 - 0) = \frac{8}{2 - \sqrt{3}} \approx 29,86$

## EXERCICE 4 SPÉCIALITÉ

## Partie A

$$x^2 - 8y^2 = 1. \quad (E)$$

1. Le couple (1; 0) est solution; avec  $y = 1$ , on trouve aussitôt  $x = 3$ .  
Le couple (3; 1) est aussi solution.

2.

$$x_0 = 1, y_0 = 0, \text{ et pour tout entier naturel } n, \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

a. *Initialisation*

On a vu que le couple  $(x_0 = 1; y_0 = 0)$  est un couple solution. Donc la proposition est vraie au rang 0.

*Hérédité*

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et supposons que le couple  $(x_n; y_n)$  est solution de l'équation (E), c'est-à-dire que  $x_n^2 - 8y_n^2 = 1$ .

$$\text{Alors } \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_n + 8y_n \\ x_n + 3y_n \end{pmatrix}$$

Donc  $x_{n+1} = 3x_n + 8y_n$  et  $y_{n+1} = x_n + 3y_n$ .

Calculons la différence :

$$x_{n+1}^2 - 8y_{n+1}^2 = (3x_n + 8y_n)^2 - 8(x_n + 3y_n)^2 = 9x_n^2 + 48x_n y_n + 64y_n^2 - 8(x_n^2 + 6x_n y_n + 9y_n^2) = 9x_n^2 + 64y_n^2 + 48x_n y_n - 8x_n^2 - 72y_n^2 - 48x_n y_n = x_n^2 - 8y_n^2 = 1, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence.}$$

Le couple  $(x_{n+1}; y_{n+1})$  est aussi un couple solution.

On a montré que la proposition est vraie au rang 0 et que si elle est vraie à un rang  $n \in \mathbb{N}$  elle l'est aussi au rang  $n + 1$  : d'après le principe de récurrence on a montré que pour tout naturel  $n$ , le couple  $(x_n; y_n)$  est une solution de (E).

b. On calcule la différence :

$x_{n+1} - x_n = 3x_n + 8y_n - x_n = 2x_n + 8y_n$ ; cette somme est positive car on suppose que  $x_n > 0$  et  $y_n \in \mathbb{N}, y_n \geq 0$ .

On a donc  $x_{n+1} - x_n > 0 \iff x_{n+1} > x_n$  : la suite  $(x_n)$  est donc strictement croissante.

3. On a vu qu'il existe au moins un couple  $(x_0; y_0)$  solution de (E) et on a démontré que pour chaque couple solution  $(x_n; y_n)$  le couple  $(x_{n+1}; y_{n+1})$  est aussi solution; comme on a montré que  $x_{n+1} > x_n$  le couple  $(x_{n+1}; y_{n+1})$  est une solution différente.

Conclusion : l'équation (E) a une infinité de solutions, les premiers termes étant de plus en plus grands. Les premiers couples sont (1;0), (3; 1), (17; 6), ...

## Partie B

Un entier naturel  $n$  est appelé un nombre puissant lorsque, pour tout diviseur premier  $p$  de  $n$ ,  $p^2$  divise  $n$ . En d'autres termes, un entier naturel  $n$  est puissant s'il est divisible par  $p^2$ , **pour tout** diviseur premier  $p$  de  $n$ .

1. • On a  $8 = 2^3$ ; l'unique diviseur premier de 8 est 2, 8 est divisible par  $2^2$ , 8 est donc puissant;  
• On a  $9 = 3^2$ ; l'unique diviseur premier de 9 est 3, 9 est divisible par  $3^2$ , 9 est donc puissant;  
8 et 9 sont deux naturels consécutifs inférieurs à 10 qui sont puissants.

**Remarque** : 12, qui est divisible par 2 et  $2^2$ , n'est pas puissant. En effet 3 est un diviseur premier de 12 et  $3^2 = 9$  ne divise pas 12.

2. On suppose que  $ab \neq 0$ , que  $a \neq b$  et  $a > 1$ .

Tout diviseur premier de  $n$  est un diviseur de  $a$  ou de  $b$

- Si  $p$  est un diviseur premier de  $a$ , alors il existe  $a' \in \mathbb{N}$  tel que  $a = p \times a'$ , donc  $n$  s'écrit  $n = p^2 a'^2 b^3$ , donc  $p^2$  divise  $n$ ;

- Si  $p$  est un diviseur premier de  $b$ , alors il existe  $b' \in \mathbb{N}$  tel que  $b = p \times b'$ , donc  $n$  s'écrit  $n = a^2 p^3 (b')^3 = p^2 p a^2 (b')^3$ , donc  $p^2$  divise  $n$ .

Conclusion  $n$  est puissant.

3. • Il est évident que  $x^2 - 1$  précède  $x^2$ ; les deux nombres sont consécutifs;

- Puisque  $(x; y)$  est un couple solution de l'équation (E), on a donc  $x^2 - 8y^2 = 1 \iff$

$x^2 - 1 = 8y^2$  qui est un nombre puissant : en effet, il est de la forme  $a^2 b^3$  avec  $a = x$  et  $b = 2$ . De même  $x^2 = x^2 \times 1^3$ ,  $x^2$  est donc également puissant.

Conclusion : si  $(x; y)$  est un couple solution de l'équation (E),  $x^2 - 1$  et  $x^2$  sont deux naturels consécutifs puissants.

On a vu que 8 et 9 sont consécutifs et puissants.

4. On a vu l'équation (E) a une infinité de couples solutions.

On a démontré que pour chaque couple  $(x; y)$  solution de (E), les nombres  $x^2 - 1$  et  $x^2$  sont consécutifs et puissants et que la suite des premiers termes est strictement croissante.

Il existe donc une infinité de naturels consécutifs et puissants.

La calculatrice donne  $(x_3; y_3) = (99; 35)$ .

On a  $99^2 = (100 - 1)^2 = 10000 - 200 + 1 = 9801$  et  $99^2 - 1 = 9800$ .

$9801 = (9 \times 11)^2 = (3^2 \times 11)^2 = 3^4 \times 11^2$ .

9801 est effectivement divisible par 3 et par  $3^2$ , par 11 et  $11^2$ ;

$9801 - 1 = 9800 = 98 \times 100 = 2 \times 49 \times (2 \times 5)^2 = 2^3 \times 5^2 \times 7^2$  est divisible par 2 et par  $2^2$ , par 5 et  $5^2$  par 7 et  $7^2$ .

9800 et 9801 sont des naturels consécutifs et puissants supérieurs à 2018.