Corrigé du baccalauréat S (obligatoire) Métropole septembre 2002

EXERCICE 1 **4 points**

Commun tous les candidats

1. **a.** L'aire du disque D est égale à $\pi \times 1^2 = \pi$ cm^2. L'aire du carré est égale à $20^2 = 400$ cm^2.
   Donc $p(\text{D}) = \dfrac{\pi}{400}$.

   b. L'aire de l'un des secteurs S_i est égale à $\dfrac{\pi \times 9^2 - \pi \times 1^2}{8} = 10\pi$, donc
   $p\left(\text{S}_i\right) = \dfrac{10\pi}{400} = \dfrac{\pi}{40}$.

2. **a.** La probabilité de placer le point dans le Reste est :
   $p(\text{R}) = 1 - 0,008 - 8 \times 0,0785 = 0,364$.
   $E(X) = 10 \times p(\text{D}) + p\left(\text{S}_1\right) \times (1+2+3+4+5+6+7+8 - 4 \times p(\text{R}) \approx 1,45$.

   b. Le gain est strictement négatif dans les cas suivants :
   (R, R), (S_1, R), (S_2, R), (S_3, R), (R, S_1), (R, S_2), (R, S_3).
   Les évènements étant indépendants on a :
   $p(\text{R}, \text{R}) = p(\text{R}) \times p(\text{R})$; de même $p\left(\text{R}, \text{S}_1\right) = p\left(\text{S}_1 \text{R}, \text{R}\right)$ et les autres probabilités sont toutes égales.
   La probabilité d'avoir un gain strictement négatif est donc égale à :
   $p^2(\text{R}) + 6p\left(\text{R}, \text{S}_1\right) \approx 0,304$.
   La probabilité d'avoir un gain positif ou nul est donc égale à : $1 - 0,304 = 0,696$.

   c. On a un schéma de Bernouilli et la variable comptant le nombre de points situés dans D sui la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,008$.
   La probabilité de n'avoir aucun point dans D est égale $(1-0,008)^n = 0,992^n$, donc la probabilité p_n d'obtenir au moins un point placé dans le disque D est $p_n = 1 - 0,992^n$.
   - $p_n \geqslant 0,9 \iff 1 - 0,992^n \geqslant 0,9 \iff 0,992^n \leqslant 0,1 \iff$
   $n \ln 0,992 \leqslant \ln 0,1 \iff n \geqslant \dfrac{\ln 0,1}{\ln 0,992} \approx 286,6$.
   La plus petite valeur de n telle que $p_n \geqslant 0,9$ est 287.

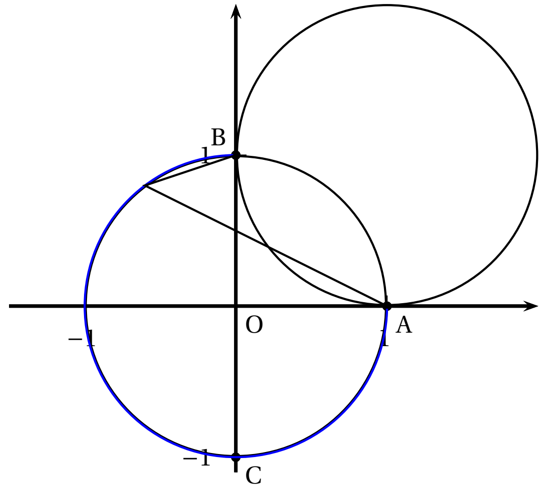
EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

$$Z = \frac{(1-\text{i})(z-\text{i})}{z-1}.$$

1. **a.** $Z_{\text{C}'} = \dfrac{(1-\text{i})(-\text{i}-\text{i})}{-\text{i}-1} = \dfrac{-2\text{i}(1-\text{i})}{-\text{i}-1} = \dfrac{2\text{i}(1-\text{i})}{\text{i}+1} = \dfrac{2\text{i}(1-\text{i})(1-\text{i})}{(\text{i}+1)(1-\text{i})} = \dfrac{2\text{i}(1-1-2\text{i}}{1+1} = -\text{i}$.
   Le point C est donc invariant

   b.



2. a. Avec $z = x + \mathrm{i}y$,

$Z = \dfrac{(1-\mathrm{i})(x+\mathrm{i}y-\mathrm{i})}{x+\mathrm{i}y-1} = \dfrac{(1-\mathrm{i})(x+\mathrm{i}(y-1))}{x-1+\mathrm{i}y} = \dfrac{(1-\mathrm{i})(x+\mathrm{i}(y-1))(x-1-\mathrm{i}y)}{(x-1+\mathrm{i}y)(x-1-\mathrm{i}y)} =$
$\dfrac{(1-\mathrm{i})[x^2-x+y^2-y+\mathrm{i}(xy-y-x+1-xy}{(x-1)^2+y^2} =$

$Z = \dfrac{x^2+y^2-x-y-x+1+\mathrm{i}(-y-x+1-x^2+x-y^2+y)}{(x-1)^2+y^2} =$

$Z = \dfrac{x^2-2x+1+y^2-2y+\mathrm{i}(-x^2-y^2+1}{(x-1)^2+y^2} =$

$Z = \dfrac{(x-1)^2+(y-1)^2-1-\mathrm{i}\left(x^2+y^2-1\right)}{(x-1)^2+y^2}$.

b. La partie imaginaire est nulle soit $x^2+y^2-1=0$ ou $x^2+y^2=1$ qui est une équation du cercle centré en O de rayon 1. C'est l'ensemble E.

c. La partie réelle est négative ou nulle si $(x-1)^2+(y-1)^2-1 \leqslant 0 \iff (x-1)^2+(y-1)^2 \leqslant 1$.

F est l'ensemble des points situés à l'intérieur ou sur le cercle centré en $(1\,;\,1)$ et de rayon 1.

3. a. $|1-\mathrm{i}|^2 = 1^2+1^2 = 2 \Rightarrow |1-\mathrm{i}| = \sqrt{2}$.

On peut donc écrire $1-\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos -\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin -\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

b. $\dfrac{(1-\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}{z-1} \in \mathbb{R}*$ si et seulement si $\arg\left(\dfrac{(1-\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}{z-1}\right) = k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Or $\arg\left(\dfrac{(1-\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}{z-1}\right) = \arg(1-\mathrm{i}) + \arg\left(\dfrac{z-\mathrm{i}}{z-1}\right)$.

Mais $\arg\left(\dfrac{z-\mathrm{i}}{z-1}\right) = \left(\overrightarrow{M\mathrm{A}},\ \overrightarrow{M\mathrm{B}}\right)$, donc

$\dfrac{(1-\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}{z-1} \in \mathbb{R}*$ si et seulement si $-\dfrac{\pi}{4} + \left(\overrightarrow{M\mathrm{A}},\ \overrightarrow{M\mathrm{B}}\right) = k\pi \iff \left(\overrightarrow{M\mathrm{A}},\ \overrightarrow{M\mathrm{B}}\right) = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

c. D'après la question précédente l'ensemble des points M vérifiant $\left(\overrightarrow{M\mathrm{A}},\ \overrightarrow{M\mathrm{B}}\right) = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ est l'ensemble des points M distincts de A et de B tel que Z soit un réel non nul. D'après la question 2. b. cet ensemble est le cercle de centre O de rayon 1 privé de A et de B.

d. En reprenant le résultat précédent, l'ensemble des points M est l'ensemble des points tels que $\arg Z = 2k\pi$ c'est-à-dire tels que Z est un réel supérieur à zéro. Il faut donc que la partie réelle de Z soit strictement positive :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x^2+y^2 & = & 1 \\ (x-1)^2+(y-1)^2 & > & 1 \end{array}\right.$$

L'ensemble cherché est donc l'arc de cercle du cercle unitaire intersection avec le cercle centré en (1 ; 1) de rayon 1, les points A et B étant exclus. Voir la figure.

On reconnaît le théorème de l'angle inscrit dont la mesure est égale à la moitié de celle de l'angle au centre qui est ici droit.

PROBLÈME **11 points**

Partie A

1. On a $x>0 \Rightarrow 2x>0 \Rightarrow \mathrm{e}^{2x}>\mathrm{e}^{0} \iff \mathrm{e}^{2x}>1 \iff \mathrm{e}^{2x}-1>0$.

2. $g(x)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x}-1}$.

a. • On a $\displaystyle\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{2x}=1$, donc $\displaystyle\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{2x}-1=0$; enfin $\displaystyle\lim_{x\to 0}g(x)=+\infty$ (car $\mathrm{e}^{2x}-1>0$).

Géométriquement : l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la représentation graphique de g au voisinage de zéro.

• $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{2x}=+\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}g(x)=0$.

Géométriquement : l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la représentation graphique de g au voisinage de moins l'infini.

b. g est dérivable et sur l'intervalle $]0~;~\infty[$:

$g'(x)=\dfrac{-2\mathrm{e}^{2x}}{\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)^2}<0$ car quel que soit le réel x, $\mathrm{e}^{2x}>0$ et $\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)^2>0$: la fonction est donc strictement décroissante de plus l'infini à zéro.

Partie B

1. $f'(x)=2\left[a(\ln x)^2+b\ln x+c\right]+2x\left[\dfrac{2a\ln x}{x}+\dfrac{b}{x}\right]=$
$2a(\ln x)^2+(4a+2b)\ln x+2b+2c$.

2. On lit sur le graphique : $f'\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=0$, $f'\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)=0$ et $f'(\mathrm{e})=4$.

3. D'après le résultat de la question a. :

$f'\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=-2a+2c$, $f'\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)=\dfrac{5}{2}a+3b+2c$ et $f'(\mathrm{e})=6a+4b+2c$, donc a, b et c vérifient le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} -2a\quad+2c &=& 0\\ \frac{5}{2}a+3b+2c &=& 0\\ 6a+4b+2c &=& 4\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} -2a\quad+2c &=& 0\\ \frac{9}{2}a+3b &=& 0\\ 8a+4b &=& 4\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a &=& c\\ 9a+6b &=& 0\\ 2a+b &=& 1\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} a &=& c\\ 9a+6b &=& 0\\ 12a+6b &=& 6\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a &=& c\\ 9a+6b &=& 0\\ 3a &=& 6\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a &=& c\\ 18+6b &=& 0\\ a &=& 2\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} a &=& 2\\ b &=& -3\\ c &=& 2\end{array}\right. .$$

D'où $f(x)=2x\left[2(\ln x)^2-3\ln x+2\right]$ pour tout $x\in\,]0~;~+\infty[$.

4. On pose pour $x>0$, $t=-\ln x \iff \ln x=-t \iff x=\mathrm{e}^{-t}$; donc
$f(t)=2\mathrm{e}^{-t}\left[2(-t)^2-3\times(-t)+2\right]=4t^2\mathrm{e}^{-t}+6t\mathrm{e}^{-t}+4\mathrm{e}^{-t}$.

Or quand x temps vers zéro t tend vers plus l'infini. On sait que :
$\displaystyle\lim_{t\to+\infty}t^2\mathrm{e}^{-t}=\lim_{t\to+\infty}t\mathrm{e}^{-t}=\lim_{t\to+\infty}4\mathrm{e}^{-t}=0$, donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}f(t)=0$.

5. On peut factoriser :

$f(x) = 2x\ln x\left[2\ln x - 3 + \dfrac{3}{2\ln x}\right]$ et comme $\lim\limits_{t\to+\infty} \ln x = +\infty$,

$\lim\limits_{t\to+\infty} 2\ln x - 3 + \dfrac{3}{2\ln x} = +\infty$ et par produit de limites $\lim\limits_{t\to+\infty} f(x) = +\infty$.

6. D'après la question 1. a. : $f'(x) = 4(\ln x)^2 + 2\ln x - 2 = (2\ln x + 2)(2\ln x - 1) = 2(\ln x + 1)(\ln x - 1)$.

7. Le signe de $f'(x)$ dépend du signe des deux facteurs $\ln x + 1$ et $2\ln x - 1$.

$\ln x + 1 = 0 \iff \ln x = -1 \iff x = \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$;

$2\ln x - 1 = 0 \iff 2\ln x = 1 \iff \ln x = \frac{1}{2} \iff x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}}$.

On calcule $f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = 2 \times \frac{1}{\mathrm{e}}\left[2 \times (-1)^2 - 3 \times (-1) + 2\right] = \frac{2}{\mathrm{e}} \times 7 = \frac{14}{\mathrm{e}}$;

$f\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) = 2 \times \sqrt{\mathrm{e}}\left[2 \times \frac{1}{4} - 3 \times \frac{1}{2} + 2\right] = 2\sqrt{\mathrm{e}}$.

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{1}{\mathrm{e}}$		$\sqrt{\mathrm{e}}$		$+\infty$
$\ln x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2\ln x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{14}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	$2\sqrt{\mathrm{e}}$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie C

1. Voir l'annexe.

2. a. $g(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x} - 1} = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x} - 1} = \dfrac{-\left(\mathrm{e}^{2x} - 1\right)}{\mathrm{e}^{2x} - 1} + \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x} - 1}$.

b. Sur $\left[\frac{1}{4}\,;\,2\right]$, $g(x) > 0$, donc l'aire demandée est égale (en unité d'aire à l'intégrale :

$\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{4}}^{2}\left[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x} - 1} - 1\right]\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{4}}^{2}\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x} - 1}\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{1}{4}}^{2} 1\,\mathrm{d}x =$

$\left[\frac{1}{2}\ln\left(\mathrm{e}^{2x} - 1\right)\right]_{\frac{1}{4}}^{2} - [x]_{\frac{1}{4}}^{2} = \frac{1}{2}\ln\left(\mathrm{e}^4 - 1\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} - 1\right) - 4 + \frac{1}{4} =$

$\dfrac{\ln\left(\mathrm{e}^4 - 1\right) - \ln\left(\sqrt{\mathrm{e}} - 1\right) - 7}{4}$

3. a. $\varphi(x) = f(x) - g(x) \Rightarrow \varphi'(x) = f'(x) - g'(x)$.

Or suer $[0{,}1\,;\,0{,}3]$, $f'(x) >$ et $g'(x) < 0$, donc $f'(x) - g'(x) > 0$.

La dérivée de φ est supérieure à zéro sur $[0{,}1\,;\,0{,}3]$.

b. La fonction φ est donc strictement croissante, continue car dérivable sur $[0{,}1\,;\,0{,}3]$.

Comme $\varphi(0,1) = 2 \times 0,1\left[2(\ln 0,1)^2 - 3\ln 0,1 + 2\right] - \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2\times 0,1} - 1} \approx -0,61 < 0$ et

$\varphi(0,3) = 2 \times 0,3\left[2(\ln 0,3)^2 - 3\ln 0,3 + 2\right] - \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2\times 0,3} - 1} \approx +0,49 > 0$.

Il existe donc un réel unique $\alpha \in]0,1\,;0,3[$ tel que

$\varphi(\alpha) = 0 \iff f(\alpha) = g(\alpha)$.

Avec la calculatrice on trouve que $0,11 < \alpha < 0,12$.

Partie D

1. On a vu que $f(0) = 0$ et que f est strictement croissante sur $\left[0\,;\,\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$; f est donc positive sur cet intervalle.

Sur $\left[\frac{1}{\mathrm{e}}\,;\,+\infty\right[$, la fonction $f$admet un minimum $2\sqrt{\mathrm{e}} > 0$; sur cet intervalle on a aussi $f(x) > 0$.

2. **a.** Par composition des limites : $\displaystyle\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{X\to 0} g(X) = +\infty$.

De même $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{X\to+\infty} g(X) = 0$

b. Par composition des sens de vraiations :

- sur $\left[0\,;\,\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$ $g\circ f$ composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est décroissante ;
- sur $\left[\frac{1}{\mathrm{e}}\,;\,\sqrt{\mathrm{e}}\right]$ $g\circ f$ composée d'une fonction décroissante et et d'une fonction décroissante est croissante ;
- sur $\left[\sqrt{\mathrm{e}}\,;\,+\infty\right[$ $g\circ f$ composée d'une fonction croissante et et d'une fonction décroissante est décroissante ;

c. Sur $\left[0\,;\,\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$, f est croissante, donc :

$0{,}11 < \alpha < 0{,}12 \Rightarrow f(0{,}11) < f(\alpha) < f(0{,}12)$.

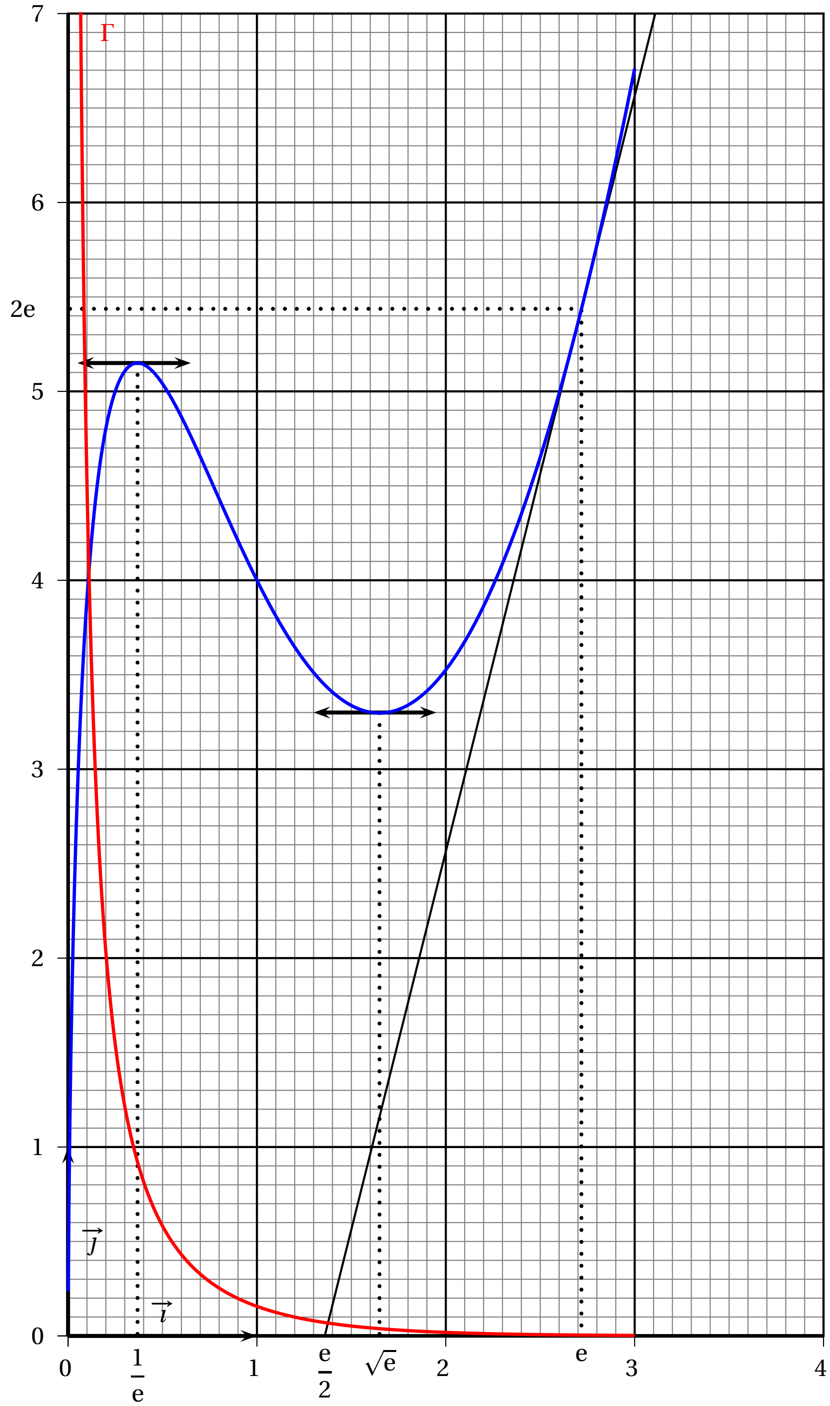
Or $f(0{,}11) \approx 4{,}0$ et $f(0{,}12) \approx 4{,}16$ et g est décroissante sur $\left[\sqrt{\mathrm{e}}\,;\,+\infty\right[$; d'où :

$f(0{,}11) < f(\alpha) < f(0{,}12) \Rightarrow g[f(0{,}12)] < g[f(\alpha)] < g[f(0{,}11)]$.

Comme $g[f(0{,}11)] \approx 3{,}09\times 10^{-4}$ et que $g[f(0{,}12)] \approx 2{,}415\times 10^{-4}$, on en déduit un encadrement de $h(\alpha) =$

$2{,}415\times 10^{-4} < g[f(\alpha)] < 3{,}09\times 10^{-4}$.

Donc $h(\alpha) \approx 2{,}8\times 10^{-4}$ au dix-millième près.


Γ
7
6
2e
5
4
3
2
1
0
$\vec{\jmath}$
$\vec{\imath}$
0
$\frac{1}{e}$
1
$\frac{e}{2}$
$\sqrt{e}$
2
e
3
4