

**Corrigé du baccalauréat S Métropole La Réunion**   
**16 septembre 2010**

**EXERCICE 1**

**6 points**

**Commun à tous les candidats**

**Partie I : Étude de la fonction  $f$**

1. Comme  $x$  est supérieur à zéro, le signe de  $f(x)$  est celui de  $1 - \ln x$ .  
 Or  $1 - \ln x > 0 \iff 1 > \ln x \iff \ln e > \ln x \iff e > x$  par croissance de la fonction  $\ln$ .  
 On a donc :
  - $f(x) > 0 \iff 0 < x < e;$
  - $f(x) = 0 \iff x = e;$
  - $f(x) < 0 \iff x > e.$
2. • Au voisinage de zéro :  $f(x) = x - x \ln x$ .  
 On sait que  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .  
 • Au voisinage de plus l'infini :  
 On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \ln x = -\infty$ . Par produit des limites on obtient :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .  
*Remarque* : la lecture de l'annexe correspond bien à ces résultats.
3.  $f$  produit de fonctions dérivables sur  $]0; +\infty[$  est dérivable sur cet intervalle et :  

$$f'(x) = 1 - \ln x + x \times \left(-\frac{1}{x}\right) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x.$$
 Or  $-\ln x > 0 \iff \ln x < 0 \iff \ln x < \ln 1 \iff x < 1$  par croissance de la fonction  $\ln$ .  
 De même  $-\ln x > 0 \iff x > 1$ .  
 Conclusion : la fonction est croissante sur  $]0; 1]$  et décroissante sur  $[1; +\infty[$ .

$x$	0	1	$e$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	
$f(x)$	0	1	0	$-\infty$

4. a. On a  $M(x; y) \in (T_a) \iff y - f(a) = f'(a)(x - a) \iff y - a + a \ln a = -\ln a(x - a) \iff y = -x \ln a + a$ .  
 Le point d'intersection de la droite  $(T_a)$  et de l'axe des ordonnées a une abscisse nulle, d'où  $y = a$ , ordonnée du point  $A'$ .  
 Conclusion :  $A'(0; a)$ .
- b. Il suffit de tracer le quart de cercle centré en O de rayon  $a$  qui coupe l'axe des ordonnées au point  $A'(0; a)$ .  
 Du point  $(a; 0)$  donné sur la figure on trace la verticale qui coupe  $\mathcal{C}$  au point  $A(a; f(a))$ .  
 La tangente est la droite  $(AA')$ . Voir à la fin la figure.

**Partie II : Un calcul d'aire**

1. • On a vu à la question 1. que sur  $]0; e]$  la fonction  $f$  est positive. La mesure de la surface limitée par la courbe  $\mathcal{C}$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives  $x = a$  et  $x = e$  est donc égale à l'intégrale  $\mathcal{A}(a) = \int_a^e f(x) dx$ .
- On a vu que sur  $[e; +\infty[$ ,  $f(x) < 0$ . Dans ce cas la surface limitée par la courbe  $\mathcal{C}$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives  $x = a$  et  $x = e$  est donc égale à  $-\int_e^a f(x) dx = \int_a^e f(x) dx = \mathcal{A}(a)$  en permutant les bornes d'intégration.
2. On a donc  $\mathcal{A}(a) = \int_a^e x(1 - \ln x) dx$ .

$$\text{Posons } \begin{cases} u'(x) = x \\ v(x) = 1 - \ln x \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} u(x) = \frac{x^2}{2} \\ v'(x) = -\frac{1}{x} \end{cases}.$$

Toutes ces fonctions étant continues et dérivables sur  $]0; +\infty[$ , on peut donc intégrer par parties :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(a) &= \left[ \frac{x^2}{2}(1 - \ln x) \right]_a^e + \int_a^e \frac{1}{x} \times \frac{x^2}{2} dx = \left[ \frac{x^2}{2}(1 - \ln x) \right]_a^e + \int_a^e \frac{x}{2} dx = \\ &= \left[ \frac{x^2}{2}(1 - \ln x) + \frac{x^2}{4} \right]_a^e = \left[ \frac{x^2}{2} \left( \frac{3}{2} - \ln x \right) + \frac{x^2}{4} \right]_a^e = \frac{e^2}{2} \left( \frac{3}{2} - 1 \right) - \frac{a^2}{2} \left( \frac{3}{2} - \ln a \right) = \frac{e^2}{4} - \frac{a^2}{2} \left( \frac{3}{2} - \ln a \right). \end{aligned}$$

## EXERCICE 2

5 points

## Commun à tous les candidats

1. a. En partant du point  $((u_0 = 5; 0))$  et en allant alternativement verticalement vers la courbe  $\mathcal{C}$  et horizontalement vers la droite  $\Delta$ , on obtient les points de la courbe  $\mathcal{C}$  d'abscisses,  $u_1, u_2, u_3$  etc. Voir la figure
- b. Sur la vue des premiers termes il semble que la suite soit décroissante vers l'abscisse du point commun à  $\mathcal{C}$  et à  $\Delta$  soit vers 1.
2. a. • *Initialisation* : on a  $u_0 - 1 = 5 - 1 = 4 > 0$  : vraie au rang 0.

• *Hérédité* : soit  $n \in \mathbb{N}$  et supposons que  $u_n - 1 > 0$ .

$$\text{Or } u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} \text{ donc } u_{n+1} - 1 = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - 1 = \frac{4u_n - 1 - u_n - 2}{u_n + 2} = \frac{3u_n - 3}{u_n + 2} = \frac{3(u_n - 1)}{u_n + 2}.$$

On sait que  $u_n - 1 > 0$ , donc  $u_n > 1$  et  $u_n + 2 > 3 > 0$ .

Tous les termes de  $u_{n+1} - 1$  sont supérieurs à zéro, donc finalement  $u_{n+1} - 1 > 0$ .

L'inégalité est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang  $n$ , elle l'est au rang  $n + 1$ ; on a donc démontré par le principe de récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n - 1 > 0$ .

- b. • *Décroissance de la suite* : soit  $u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - u_n = \frac{4u_n - 1 - u_n^2 - 2u_n}{u_n + 2} = \frac{-u_n^2 + 2u_n - 1}{u_n + 2} = -\frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{u_n + 2} = -\frac{(u_n - 1)^2}{u_n + 2}$ . Les deux termes du quotient sont positifs, donc finalement

$u_{n+1} - u_n < 0$  ce qui démontre que la suite  $(u_n)$  est décroissante.

Or  $u_n - 1 > 0 \iff u_n > 1$  La suite étant minorée par 1 et décroissante converge vers une limite  $\ell \geq 1$  et par continuité de la fonction  $f$ , on a  $\ell = \frac{4\ell - 1}{\ell + 2}$  équation dont la seule solution est  $\ell = 1$ .

La suite  $(u_n)$  converge vers 1.

3. a. On a  $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} - 1} - \frac{1}{u_n - 1}$ .

Or on a vu ci-dessus (démonstration par récurrence) que  $u_{n+1} - 1 = \frac{3(u_n - 1)}{u_n + 2}$ , donc

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 2}{3(u_n - 1)} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{u_n + 2 - 3}{3(u_n - 1)} = \frac{u_n - 1}{3(u_n - 1)} = \frac{1}{3}, \text{ car on a vu que } u_n - 1 > 0.$$

Ceci montre que la suite  $(v_n)$  est une suite arithmétique de raison  $\frac{1}{3}$ , de premier terme

$$v_0 = \frac{1}{u_0 - 1} = \frac{1}{5 - 1} = \frac{1}{4}.$$

b. On sait que  $v_n = v_0 + n \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times n = \frac{1}{4} + \frac{n}{3} = \frac{3 + 4n}{12}$ .

Or  $v_n = \frac{1}{u_n - 1} \iff u_n - 1 = \frac{1}{v_n} \iff u_n = \frac{1}{v_n} + 1 = \frac{12}{3 + 4n} + 1 = \frac{12 + 3 + 4n}{3 + 4n} = \frac{15 + 4n}{3 + 4n}$ , quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ .

On retrouve ici que les termes de  $(u_n)$  sont des rationnels et comme le suggérait les constructions du 1. a. que  $u_1 = \frac{19}{7}$ ,  $u_2 = \frac{23}{11} = 2$ ,  $u_3 = \frac{9}{5} = 1,8$ .

c. Pour  $n > 0$  on peut écrire  $u_n = \frac{4 + \frac{15}{n}}{4 + \frac{3}{n}}$ .

On voit facilement que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ .

### EXERCICE 3

4 points

#### Commun à tous les candidats

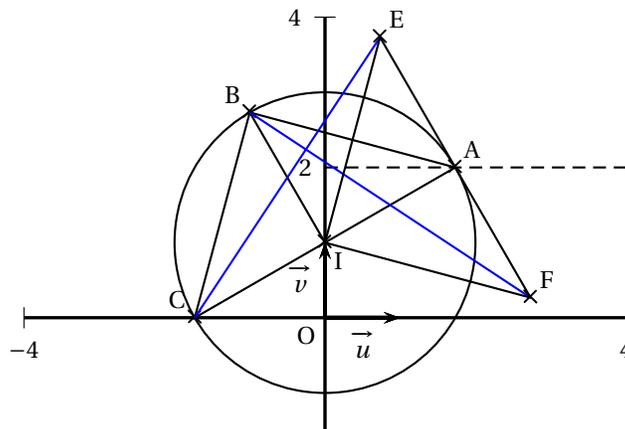
1. a.  $C(1; 3; 2) \in (\mathcal{P}) \iff 3 \times 1 + 3 - 2 - 1 = 0 \iff 3 = 0$ , faux. Le point C n'appartient pas au plan  $(\mathcal{P})$ .
- b. Soit  $M$  un point de  $(\mathcal{D})$ .  
 $M \in (\mathcal{P}) \iff 3(-t + 1) + 2t - (-t + 2) - 1 = 0 \iff -3t + 3 + 2t + t - 2 - 1 = 0$ , vrai quel que soit  $t$ .  
 Tout point de  $(\mathcal{D})$  est un point de  $(\mathcal{P})$ , donc la droite  $(\mathcal{D})$  est incluse dans le plan  $(\mathcal{P})$ .
2. a. Un vecteur normal au plan  $(\mathcal{Q})$  est un vecteur directeur de  $(\mathcal{D})$ ; d'après la représentation paramétrique les coordonnées d'un vecteur directeur de  $(\mathcal{D})$  sont  $(-1; 2; -1)$ .  
 Une équation du plan  $(\mathcal{Q})$  est donc :  
 $M(x; y; z) \in (\mathcal{Q}) \iff -x + 2y - z + d = 0$ .  
 Or  $C(1; 3; 2) \in (\mathcal{Q}) \iff -1 + 2 \times 3 - 2 + d = 0 \iff 3 + d = 0 \iff d = -3$ .  
 Conclusion :  $M(x; y; z) \in (\mathcal{Q}) \iff -x + 2y - z - 3 = 0$ .
- b. Soit  $M(-t + 1; 2t; -t + 2)$  un point de  $(\mathcal{Q})$ .  
 $M \in (\mathcal{Q}) \iff -(-t + 1) + 2 \times 2t - (-t + 2) - 3 = 0 \iff t - 1 + 4t + t - 2 - 3 = 0 \iff 6t - 6 = 0 \iff t = 1$ .  
 Donc le point commun I à  $(\mathcal{Q})$  et à la droite  $(\mathcal{D})$  a pour coordonnées  $(-1 + 1; 2 \times 1; -1 + 2) = (0; 2; 1)$ .
- c. On a  $\overrightarrow{CI}(-1; -1; -1)$ . Donc  $CI^2 = \overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{CI} = 1 + 1 + 1 = 3$ .  
 Conclusion  $CI = \sqrt{3}$ .
3. Soit  $t$  un nombre réel et  $M_t$  le point de la droite  $(\mathcal{D})$  de coordonnées  $(-t + 1; 2t; -t + 2)$ .
  - a. On calcule les coordonnées de  $\overrightarrow{CM_t}(-t + 1 - 1; 2t - 3; -t + 2 - 2)$  soit  $(-t; 2t - 3; t)$ .  
 On a  $CM_t^2 = \overrightarrow{CM_t} \cdot \overrightarrow{CM_t} = (-t)^2 + (2t - 3)^2 + t^2 = t^2 + 4t^2 + 9 - 12t + t^2 = 6t^2 - 12t + 9$ .
  - b.  $CM_t^2 = 6t^2 - 12t + 9 = 6 \left( t^2 - 2t + \frac{9}{6} \right) = 6 \left[ (t^2 - 2t + 1) - 1 + \frac{3}{2} \right] = 6 \left[ (t - 1)^2 + \frac{1}{2} \right]$ .  
 Le minimum de ce trinôme somme de deux carrés est obtenue lorsque le premier carré est nul soit pour  $t = 1$  et la valeur minimale de trinôme est égale à  $CM_t^2 = 6 \times \frac{1}{2} = 3 \Rightarrow CM_t = \sqrt{3}$ . CI est bien la valeur minimale.

## EXERCICE 4

5 points

## Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. a. On a  $I(0; 1)$  et  $A(\sqrt{3}; 2)$ ; donc  $IA^2 = (\sqrt{3})^2 + (2-1)^2 = 3+1 = 4 = 2^2 \Rightarrow IA = 2$ .  
Le point A appartient au cercle  $\Gamma$  de centre le point I et de rayon 2. Pour construire le point A, il suffit de tracer l'horizontale contenant le point  $(0; 2)$  qui coupe le cercle  $\Gamma$  de centre I, de rayon 2. A est le point d'abscisse positive.
- b. Par définition un point M d'affixe  $z$  a pour image  $M'$  d'affixe  $z'$  tel que  $z' - z_I = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_I)$  soit  $z - i = i(z - i) \Leftrightarrow z = iz + 1 + i$ .  
Donc  $z_B = i(\sqrt{3} + 2i) + 1 + i = i\sqrt{3} - 2 + 1 + i = -1 + i(\sqrt{3} + 1)$ .  
La rotation est une isométrie, donc  $IA = IB = 2$ , d'après la question 1. a. Le point B appartient donc au cercle  $\Gamma$ .
- c. Par définition du milieu  $x_I = \frac{x_A + x_C}{2}$  soit  $0 = \frac{\sqrt{3} + x_C}{2} \Leftrightarrow x_C = -\sqrt{3}$ .  
De même  $y_I = \frac{y_A + y_C}{2}$  soit  $1 = \frac{2 + y_C}{2} \Leftrightarrow y_C = 0$ .  
Conclusion  $z_C = -\sqrt{3}$ .  
Remarque : on aurait pu dire que C est l'image de B par la rotation  $r$
- d. Par définition de la rotation (BI) est perpendiculaire à (IA). D'autre part [AC] est un diamètre de  $\Gamma$ . Dans le triangle ABC, inscrit dans le cercle  $\Gamma$  dont un de ses côtés est un diamètre est donc rectangle en B et (BI) étant à la fois hauteur et médiane, le triangle ABC est isocèle en B.  
Le triangle ABC est rectangle isocèle en B.
2. Il semble que (BF) et (CE) sont perpendiculaires.
- Démonstration :**  
De  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{IB}$  et  $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{IB}$ , on déduit que  $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{AE}$ , c'est-à-dire que A est le milieu de [EF].  
D'autre part  $BI = IA = 2 = EA = AF$  : donc le triangle EIF est inscrit dans le cercle de diamètre [EF] : il est donc rectangle en I.  
De plus (BI)  $\perp$  (AC) et  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{IB}$  entraîne que (AE) et (IB) sont parallèles, donc (AC) est perpendiculaire à (AE). Dans le triangle EIF la droite (IA) est à la fois hauteur et médiane : ce triangle est donc rectangle isocèle en I.  
Par la rotation  $r$  :  
– B a pour image C  
– F a pour image E  
Par définition de  $r$  rotation d'angle  $\frac{\pi}{2}$ , la droite (BF) a pour image la droite perpendiculaire (CE).



## EXERCICE 4

5 points

## Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. a. On sait que l'écriture complexe d'une similitude directe est  $z' = az + b$ .

$$s(O) = D \iff 1 = 0 + b \iff b = 1;$$

$$s(A) = E \iff 1 + 3i = a \times (-2) + 1 \iff a = -\frac{3}{2}i.$$

L'écriture complexe de  $s$  est donc :  $z' = -\frac{3}{2}iz + 1$ .

- b. Recherche de point invariant :

$$M = s(M) \iff z = -\frac{3}{2}iz + 1 \iff z \left(1 + \frac{3}{2}i\right) = 1 \iff z = \frac{2}{2+3i} = \frac{2(2-3i)}{4+9} = \frac{2}{13}(2-3i).$$

$$\begin{cases} z' &= -\frac{3}{2}iz + 1 \\ \frac{2}{13}(2-3i) &= -\frac{3}{2}i \left[ \frac{2}{13}(2-3i) \right] + 1 \end{cases} \text{ entraîne par différence :}$$

$$z' - \frac{2}{13}(2-3i) = -\frac{3}{2}i \left[ z - \frac{2}{13}(2-3i) \right] \iff z' - \frac{2}{13}(2-3i) = \frac{3}{2}e^{-\frac{\pi}{2}} \left[ z - \frac{2}{13}(2-3i) \right].$$

Conclusion : l'angle de la similitude est égal à  $-\frac{\pi}{2}$  et le rapport est égal à  $\frac{3}{2}$ .

- c. On sait déjà que O a pour image D et A a pour image E.

Comme  $OG = 3$  et  $OC = 1$ , il est aisé de voir que l'image de C est G.

Enfin OABC étant un rectangle son image par  $s$  est aussi un rectangle : c'est donc le rectangle DEFG.

2. a. En utilisant l'écriture complexe de  $s'$  :

$$s(1) = -\frac{2}{3}i \times 1 + \frac{5}{3}i = i;$$

$$s(1+3i) = -\frac{2}{3}i(1-3i) + \frac{5}{3}i = -2+i;$$

$$s\left(\frac{5}{2}+3i\right) = -\frac{2}{3}i\left(\frac{5}{2}-3i\right) + \frac{5}{3}i = -2;$$

$$s\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{2}{3}i\left(\frac{5}{2}\right) + \frac{5}{3}i = 0.$$

Donc l'image du rectangle DEFG est le rectangle CBAO.

- b. On a  $g(O) = s'[s(O)] = s'(D) = C$ ;

$$g(A) = s'[s(A)] = s'(E) = B;$$

$$g(B) = s'[s(B)] = s'(F) = A;$$

$$g(C) = s'[s(C)] = s'(G) = O;$$

L'image du rectangle OABC par la similitude  $g$  est donc le rectangle CBAO.

- c. Cherchons l'écriture complexe de  $g$  :

$$g(z) = s' \circ s(z) = s'[s(z)] = s'[-\frac{3}{2}iz + 1] = \frac{2}{3}i \left( -\frac{3}{2}iz + 1 \right) + \frac{5}{3}i = \frac{2}{3}i \left( \frac{3}{2}i\bar{z} + 1 \right) + \frac{5}{3}i = \bar{z} - \frac{2}{3}i + \frac{5}{3}i = \bar{z} + i.$$

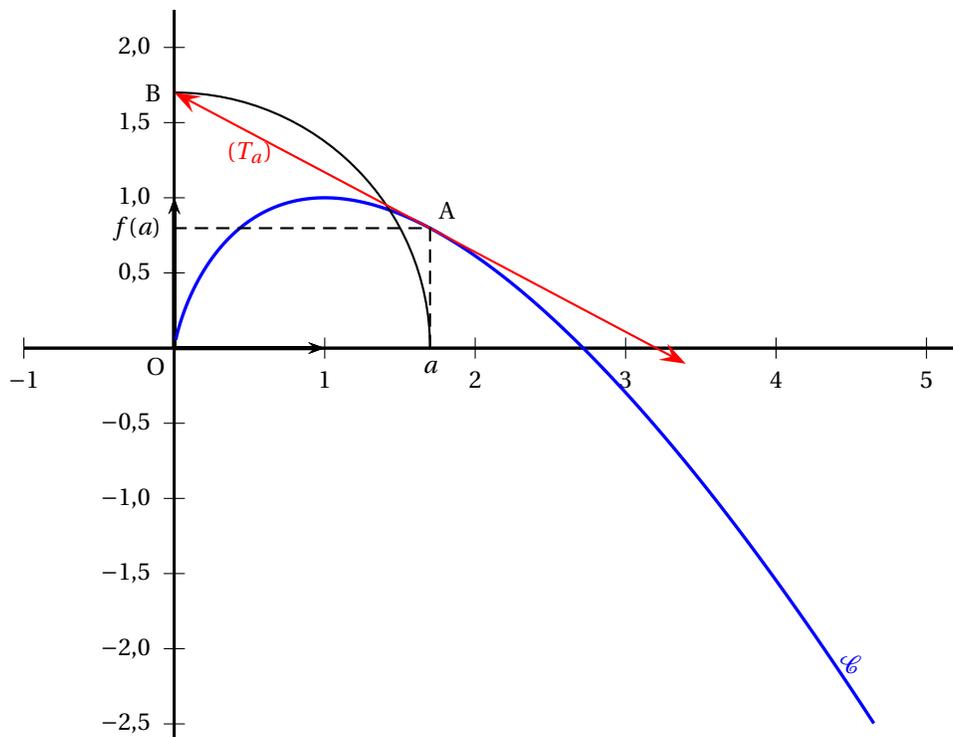
Un point  $M$  d'affixe  $z = x + iy$  est invariant par  $g$  si, et seulement si :

$$z = \bar{z} + i \iff x + iy = x - iy + i \iff 2y = 1 \iff y = \frac{1}{2}, x \text{ étant quelconque.}$$

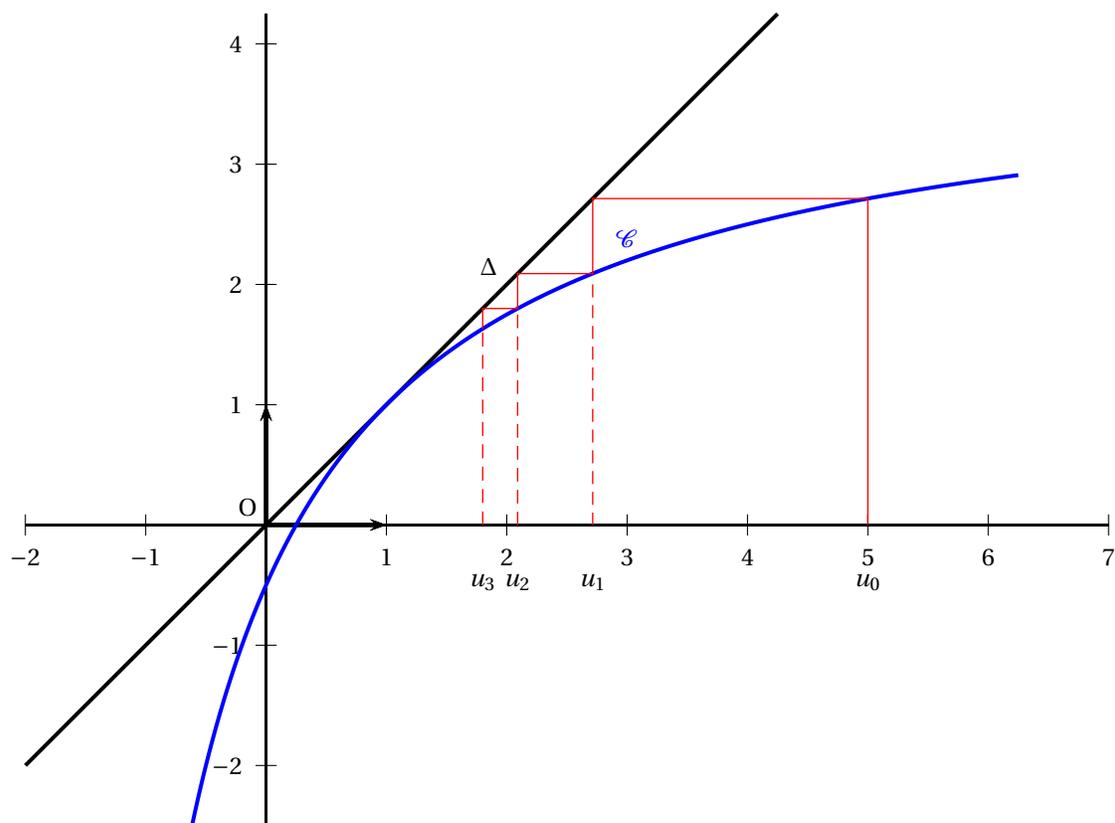
L'ensemble des points invariants par  $g$  est la droite d'équation  $y = \frac{1}{2}$ . Or  $g$  composée de deux similitudes est une similitude ayant une droite de points invariants : c'est la symétrie axiale autour de la droite d'équation  $y = \frac{1}{2}$ .

On a d'ailleurs vu au dessus que A et B d'une part O et C d'autre part s'échangent dans la similitude  $g$  : l'axe de la symétrie est donc l'un des axes de symétrie du rectangle OABC.

**ANNEXE 1 (Exercice 1)**  
**(à rendre avec la copie)**



**ANNEXE 2 (Exercice 2)**  
(à rendre avec la copie)



ANNEXE 3 (Exercice 4)  
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

