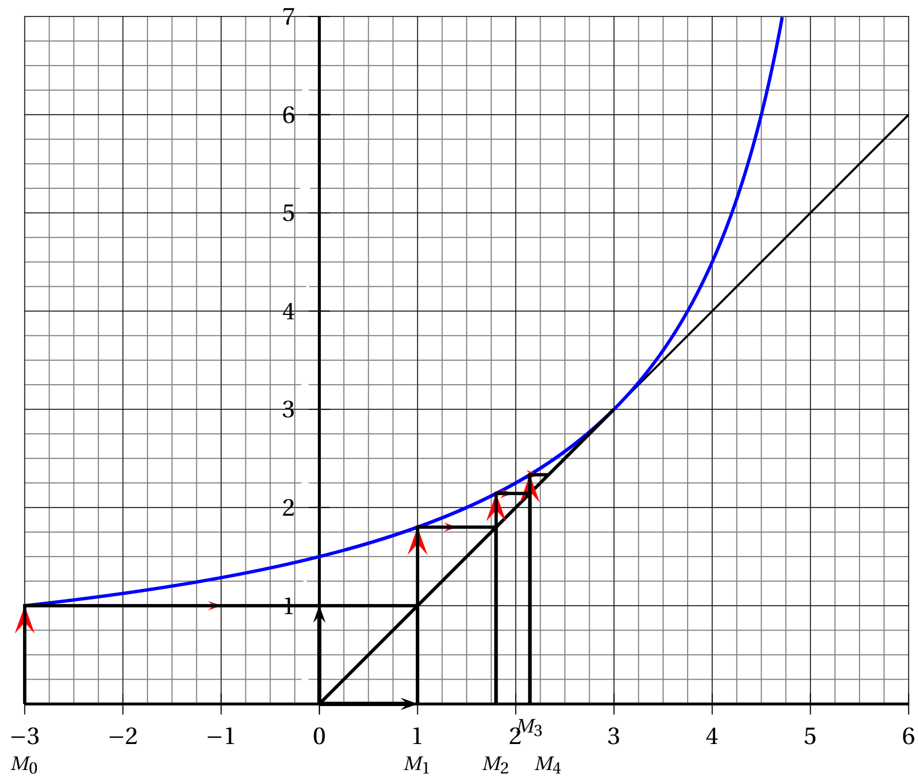
Durée : 4 heures

∽ Corrigé du baccalauréat S Nouvelle-Calédonie mars 2008 ∽ (spécialité)

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

1.



On peut conjecturer que :

— la suite est croissante;

— la suite converge vers 3.

2. **a.** $x < 3 \iff -3 < -x \iff 6-3, < 6-x \iff 3 < 6-x \iff \dfrac{1}{6-x} < \dfrac{1}{3} \iff 9 \times \dfrac{1}{6-x} < 9 \times \dfrac{1}{3} \iff \dfrac{9}{6-x} < 3$.

On vient donc de démontrer que si $x < 3$, alors $f(x) < 3$.

Par récurrence immédiate : de $U_0 < 3$ et de $U_n < 3$ entraîne $U_{n+1} = f(U_n) < 3$, on déduit aussitôt que pour tout entier naturel n, $U_n < 3$.

b. On a $U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n = \dfrac{9}{6-U_n} - U_n = \dfrac{9-6U_n+U_n^2}{6-U_n} = \dfrac{(U_n-3)^2}{6-U_n}$.

On vient de démontrer que $U_n < 3 < 6$, donc le dénominateur est positif et le numérateur (carré) aussi.

On a donc $U_{n+1} - U_n > 0 \iff U_{n+1} > U_n$: la suite est croissante (strictement).

c. La suite (U_n) est croissante et majorée par 3 : elle converge vers une limite inférieure ou égale à 3.

3. Soit la suite définie par $V_n = \dfrac{1}{U_n - 3}$ pour tout entier naturel n.

a. Calculons la différence $V_{n+1} - V_n = \dfrac{1}{U_{n+1} - 3} - \dfrac{1}{U_n - 3} = \dfrac{1}{\frac{9}{6-U_n} - 3} - \dfrac{1}{U_n - 3} = \dfrac{6 - U_n}{9 - 18 + 3U_n} - \dfrac{1}{U_n - 3} = \dfrac{6 - U_n}{3U_n - 9} - \dfrac{1}{U_n - 3} = \dfrac{6 - U_n}{3(U_n - 3)} - \dfrac{1}{U_n - 3} = \dfrac{6 - U_n - 3}{3(U_n - 3)} = \dfrac{3 - U_n}{3(U_n - 3)} = -\dfrac{1}{3}$. On vient donc de démontrer que la suite (V_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

b. On a $V_0 = \dfrac{1}{-3 - 3} = -\dfrac{1}{6}$.

On sait que $V_n = V_0 + n \times \left(-\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{1}{6} - \dfrac{2n}{6} = -\dfrac{2n + 1}{6}$.

Or $U_n - 3 = \dfrac{1}{V_n} = \dfrac{-6}{2n + 1}$.

c. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-6}{2n+1} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n - 3 = 0$ et finalement

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 3.$$

Exercice 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A : Question de cours

Quelles sont les propriétés de compatibilité de la relation de congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances ?

Démontrer la propriété de compatibilité avec la multiplication.

1. a. Soit N_1 le nombre s'écrivant en base 12 :

$$N_1 = \overline{\beta 1 \alpha}^{12}$$

On a donc $N_1 = 11 \times 12^2 + 1 \times 12^1 + 10 = 1\,606$.

b. Soit N_2 le nombre s'écrivant en base 10 : $N_2 = 1\,131$.

La plus grande puissance de 12 contenue dans 1 131 est 12^2 et $1\,131 = 7 \times 144 + 123 = 7 \times 12^2 + 10 \times 12 + 3$.

On a donc $N_2 = \overline{7\alpha 3}^{12}$.

Dans toute la suite, un entier naturel N s'écrira de manière générale en base 12 :

$$N = \overline{a_n \cdots a_1 a_0}^{12}$$

2. a. On a pour $1 \leqslant i \leqslant n, a_i \times 12^i \equiv 12 \quad [0]$, donc $a_i \times 12^i \equiv 3 \quad (0)$. Donc $N \equiv a_0 \quad (3)$.

Pn en déduit que si a_0 est un multiple de 3, N l'est aussi. (ou encore N est multiple de 3 s'il se termine par 0, 3, 6 ou 9.

b. Comme $N_2 = \overline{7\alpha 3}^{12}$, il est donc multiple de 3. De son écriture décimale (1 131) et de $1 + 1 + 3 + 1 = 6$ est multiple de 3, donc 1 131 l'est aussi.

3. **a.** On a $N = \sum_{i=0}^{n} a_i \times 12^i$. Quel que soit i tel que $1 \leqslant i \leqslant n,\ 12^i = (11+1)^i$. En développant cette puissance avec la formule du binôme, tous les termes de la somme sont congrus à 11 sauf le dernier : autrement dit $a_i \times 12^i \equiv a_0 \quad (11)$ et finalement $N \equiv a_n + \cdots + a_1 + a_0 \quad (11)$.
Conclusion : un nombre écrit en base 12 est un multiple de 11 si la somme des nombres représentant ses chiffres est elle-même un multiple de 11.

   b. Ainsi pour N_1, comme $\beta + 1 + \alpha$ soit $11 + 1 + 10 = 22 = 2 \times 11,\ N_1$ est un multiple de 11.
En écriture décimale $1\,606 = 146 \times 11$, montre bien que N_1 est un multiple de 11.

4. Des questions **2.** et **3.** on déduit que $N = \overline{x4y}^{12}$ est un multiple de 3 et de 11 et donc de 3×11, puisque ces deux nombres sont premiers entre eux, si : $\left\{\begin{array}{lcl} y & = & 0 \quad (3) \\ x + 4 + y & = & 11k \end{array}\right.$

   — $y = 0 \Rightarrow x = 7$
   — $y = 3 \Rightarrow x = 4$
   — $y = 6 \Rightarrow x = 1$
   — $y = 9 \Rightarrow x = 9$

   Les solutions sont donc les nombres $\overline{740}^{12}$, $\overline{443}^{12}$, $\overline{146}^{12}$, $\overline{949}^{12}$.

EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

1. **a.** La probabilité qu'un alevin de premier élevage soit vivant au bout de trois mois est $0,9$ et celle d'un alevin du deuxième élevage $0,95$.
La probabilité pour l'enfant d'avoir un alevin vivant est donc $0,6 \times 0,9 + 0,4 \times 0,95 = 0,54 + 0,38 = 0,92$.

   b. De même la probabilité pour l'enfant d'avoir un poisson rouge est égale à $0,6 \times 0,75 + 0,4 \times 0,65 = 0,45 + 0,26 = 0,71$.

   c. Les poissons vivants sont rouge ou gris. La probabilité d'avoir un alevin gris est donc égale à $0,92 - 0,71 = 0,21$.
La probabilité qu'il soit gris et provienne du premier élevage est égale à $0,6 \times 0,15 = 0,09$.
On a donc : $p_{\text{gris}}(\text{élevage } 1) = \dfrac{\text{gris} \cap \text{élevage } 1}{p(\text{gris})} = \dfrac{0,09}{0,21} = \dfrac{9}{21} = \dfrac{3}{7}$.

2. On suppose qu'il y a assez d'alevins pour que la probabilité d'avoir un alevin en vie au bout de trois mois est toujours égale à $0,92$.
On a donc une épreuve de Bernoulli avec $n = 5,\ p = 0,92$.
La probabilité d'avoir 3 alevins en vie sur 5 au bout de trois mois est donc égale à :

$$\binom{5}{3} 0,92^3 \times (1 - 0,92)^2 = 10 \times 0,92^3 \times 0,08^2 \approx 0,049 \approx 0,05 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

3. On a le tableau de loi de probabilité suivant :

couleur	rouge	gris	mort
probabilité	0,71	0,21	0,08
gain(€)	$+1$	$+0,25$	$-0,10$

   On a donc $\text{E}(X) = 0,71 \times 1 + 0,21 \times 0,25 - 0,08 \times 0,10 = 0,754\,5 \approx 0,75$ €.

EXERCICE 4 — 5 points

Commun à tous les candidats

1. **a.** On sait que le vecteur $\overrightarrow{n}(4~;~1~;~2)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et donc qu'une équation d'un plan $\mathcal{P}$ perpendiculaire à $\mathcal{D}$ est $4x+1y+2z+d=0$. A appartient à ce plan si $4\times(-1)+1\times 2+2\times 3+d=0 \iff 4+d=0 \iff d=-4$.

   Une équation du plan $\mathcal{P}$ est donc : $4x+1y+2z-4=0$.

   b. On voit que la valeur $t=-3$ donne les coordonnées du point B.

   c. On sait que la distance d_{B} du point B au plan $\mathcal{P}$ est égale à $d(\text{B}, \mathcal{P}) = \dfrac{\left|4x_{\text{B}}+y_{\text{B}}+2z_{\text{B}}-4\right|}{\sqrt{4^2+1^2+2^2}} =$ $\dfrac{|4\times(-3)+3+2\times(-4)-4|}{\sqrt{4^2+1^2+2^2}} = \dfrac{21}{\sqrt{21}} = \sqrt{21}$.

   d. La droite $\mathcal{D}$ est perpendiculaire à $\mathcal{P}$, donc orthogonale à toute droite de $\mathcal{P}$. On a donc un triangle rectangle de côtés d_{B} et d et d'hypoténuse [AB]. Le théorème de Pythagore permet d'écrire $d^2=\text{AB}^2-d_{\text{B}}^2$.
   $\text{AB}^2=(-2)^2+1^2+(-7)^2=54$.

   Donc $d^2=54-21=33$. Finalement $d=\sqrt{33}$.

2. On a $\text{A}M^2=(10+4t)^2+(4+t)^2+(-1+2t)^2=$
   $100+16t^2+80t+16+t^2+8t+1+4t^2-4t=21t^2+84t+117$.

   La distance de A à la droite $\mathcal{D}$ est la plus petite distance AM, donc le carré de la distance correspond au minimum du trinôme $21t^2+84t+117$.
   $21t^2+84t+117=21\left(t^2+4t+\dfrac{117}{21}\right)=21\left[(t+2)^2-4+\dfrac{117}{21}\right]=21\left[(t+2)^2+\dfrac{33}{21}\right]$.
   Le minimum est obtenu pour $t=-2$; pour cette valeur le trinôme vaut
   $21\times\dfrac{33}{21}=33=d^2$. Et finalement $d=\sqrt{33}$.