Corrigé du baccalauréat S

Nouvelle-Calédonie & Wallis et Futuna – 28 novembre 2017

Exercice 1 — 4 points

Commun à tous les candidats

Sofia souhaite se rendre au cinéma. Elle peut y aller à vélo ou en bus.

Partie A : En utilisant le bus

On suppose dans cette partie que Sofia utilise le bus pour se rendre au cinéma. La durée du trajet entre son domicile et le cinéma (exprimée en minutes) est modélisée par la variable aléatoire T_B qui suit la loi uniforme sur $[12\ ;\ 15]$.

1. On sait que si une variable aléatoire T suit une loi uniforme sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, alors pour α et β tels que $a \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b$, on a $P(\alpha \leqslant T \leqslant \beta) = \dfrac{\beta - \alpha}{b - a}$.
   Comme T_B suit une loi uniforme sur $[12\ ;\ 15]$, $P(12 \leqslant T_B \leqslant 14) = \dfrac{14-12}{15-12} = \dfrac{2}{3}$.
2. La durée moyenne du trajet est donnée par l'espérance mathématique de la variable aléatoire.
   On sait que si une variable aléatoire T suit une loi uniforme sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, alors $E(T) = \dfrac{a+b}{2}$; donc la durée moyenne du trajet est $E(T_B) = \dfrac{12+15}{2} = 13{,}5$ minutes.

Partie B : En utilisant son vélo

On suppose à présent que Sofia choisit d'utiliser son vélo.
La durée du parcours (exprimée en minutes) est modélisée par la variable aléatoire T_V qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 14$ et d'écart-type $\sigma = 1{,}5$.

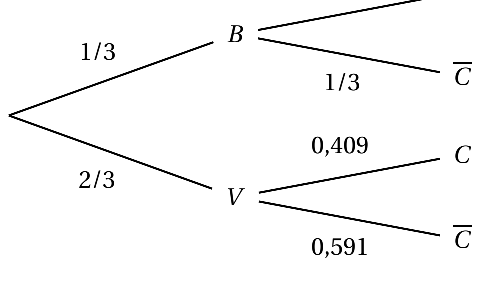
1. Si une variable aléatoire T suit une loi normale de paramètres μ et σ, alors $P(T < \mu) = 0{,}5$.
   Comme T_V suit la loi normale de paramètres $\mu = 14$ et $\sigma = 1{,}5$, alors $P(T_V < 14) = 0{,}5$.
2. La probabilité que Sofia mette entre 12 et 14 minutes pour se rendre au cinéma est
   $P(12 \leqslant T_V \leqslant 13) \approx 0{,}409$ (trouvé à la calculatrice).

Partie C : En jouant aux dés

Sofia hésite entre le bus et le vélo. Elle décide de lancer un dé équilibré à 6 faces.
Si elle obtient 1 ou 2, elle prend le bus, sinon elle prend son vélo. On note :

— B l'évènement « Sofia prend le bus » ;
— V l'évènement « Sofia prend son vélo » ;
— C l'évènement « Sofia met entre 12 et 14 minutes pour se rendre au cinéma ».

1. Sofia prend le bus quand elle obtient 1 ou 2 en lançant le dé, donc avec une probabilité de $\dfrac{1}{3}$.
   On résume les données dans un arbre pondéré :



   D'après la formule des probabilités totales : $P(C) = P(B \cap C) + P(V \cap C) \approx \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3} \times 0{,}409 \approx 0{,}49$.

2. Sachant que Sofia a mis entre 12 et 14 minutes pour se rendre au cinéma, la probabilité, arrondie à 10^{-2}, qu'elle ait emprunté le bus est $P_C(B) = \dfrac{P(B \cap C)}{P(C)} \approx \dfrac{\frac{2}{9}}{0,49} \approx 0,45$.

Exercice 2 — 5 points

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\left(\ln(x)\right)^2}{x}$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. On cherche la limite de la fonction f en 0 :

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty \implies \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\ln(x)\right)^2 = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty \end{array}\right\} \implies \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\left(\ln(x)\right)^2}{x} = +\infty \text{ et donc } \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$$

On en déduit que la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}$.

2. a. On sait que pour tout $a > 0$, $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$.

On en déduit que, pour $x > 0$, $\left(\ln\left(\sqrt{x}\right)\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\ln(x)\right)^2 = \dfrac{1}{4}\left(\ln(x)\right)^2$.

On a donc pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$:

$$4\left(\frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)^2 = 4\frac{\left(\ln\left(\sqrt{x}\right)\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = 4 \times \frac{1}{4}\left(\ln(x)\right)^2 \times \frac{1}{x} = \frac{\left(\ln(x)\right)^2}{x} = f(x).$$

b. En utilisant cette écriture de $f(x)$, on cherche la limite de $f(x)$ en $+\infty$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty \\ \text{On pose } X = \sqrt{x} \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln(X)}{X} = 0 \end{array}\right\} \implies \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}} = 0 \text{ donc } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

On en déduit que l'axe des abscisses est une asymptote à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$.

3. On admet que f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

a. Pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2\frac{1}{x}\ln(x) \times x - \left(\ln(x)\right)^2 \times 1}{x^2} = \dfrac{\ln(x)\left(2 - \ln(x)\right)}{x^2}$.

b. On étudie le signe de $f'(x)$ au moyen d'un tableau.

$\ln(x) > 0 \iff x > 1$ et $2 - \ln(x) > 0 \iff 2 > \ln(x) \iff \mathrm{e}^2 > x \iff x < \mathrm{e}^2$

x	0		1		e^2		$+\infty$
$\ln(x)$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$2-\ln(x)$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
x^2	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x) = \dfrac{\ln(x)\,(2-\ln(x))}{x^2}$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

c. $f(1) = \dfrac{\left(\ln(1)\right)^2}{1} = 0$ et $f\left(\mathrm{e}^2\right) = \dfrac{\left(\ln\left(\mathrm{e}^2\right)\right)^2}{\mathrm{e}^2} = \dfrac{4}{\mathrm{e}^2} \approx 0,54 < 1$

On obtient alors le tableau de variations ci-dessous, que l'on complète :

x	0	α	1		e^2		$+\infty$
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘ 1 ↘	0	↗	$\dfrac{4}{\mathrm{e}^2} < 1$	↘	0

4. D'après le tableau de variations précédent, on peut dire que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique sur $]0\,;\,+\infty[$ et que cette solution α appartient à l'intervalle $]0\,;\,1[$.

$\left\{\begin{array}{l} f(0{,}4) \approx 2{,}1 > 1 \\ f(0{,}5) \approx 0{,}96 < 1 \end{array}\right. \implies \alpha \in]0{,}4\,;\,0{,}5[$ $\qquad$ $\left\{\begin{array}{l} f(0{,}49) \approx 1{,}04 > 1 \\ f(0{,}50) \approx 0{,}96 < 1 \end{array}\right. \implies \alpha \in]0{,}49\,;\,0{,}50[$

Exercice 3 — 3 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels par $f(x) = 2\,\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{2x}$
et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.
On admet que, pour tout x appartenant à $[0\,;\,\ln(2)]$, $f(x)$ est positif.

Proposition A :

L'aire du domaine délimité par les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln(2)$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$ est égale à 1 unité d'aire.

Comme la fonction f est positive sur $[0\,;\,\ln(2)]$, l'aire du domaine est égale à $\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^{\ln(2)} f(x)\,\mathrm{d}x$.

La fonction f a pour primitive la fonction F définie sur $\mathbf{R}$ par $F(x) = 2\,\mathrm{e}^{x} - \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}$.

Donc $\mathscr{A} = F(\ln(2)) - F(0) = \left[2 \times 2 - \dfrac{4}{2}\right] - \left[2 - \dfrac{1}{2}\right] = \dfrac{1}{2}$.

Proposition A fausse

Partie B

Soit n un entier strictement positif.
Soit la fonction f_n définie sur l'ensemble des nombres réels par $f_n(x) = 2n\,\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{2x}$ et $\mathscr{C}_n$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.
On admet que f_n est dérivable et que $\mathscr{C}_n$ admet une tangente horizontale en un unique point S_n.

Proposition B :

Pour tout entier strictement positif n, l'ordonnée du point S_n est n^2.

$\mathscr{C}_n$ admet une tangente horizontale au point S_n d'abscisse α où $f_n(\alpha) = 0$.
$f_n'(x) = 2n\,\mathrm{e}^{x} - 2\,\mathrm{e}^{2x} = 2\,\mathrm{e}^{x}(n - \mathrm{e}^{x})$; $f_n'(x) = 0 \iff n - \mathrm{e}^{x} = 0 \iff \ln(n) = x$.
Donc le point S_n a pour abscisse $\ln(n)$; son ordonnée est
$f(\ln(n)) = 2n\,\mathrm{e}^{\ln(n)} - \mathrm{e}^{2\ln(n)} = 2n^2 - n^2 = n^2$.

Proposition B vraie

Exercice 4 — 3 points

Commun à tous les candidats

On considère la suite des nombres complexes (z_n) définie pour tout entier naturel n par $z_n = \dfrac{1+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^n}$.

1. Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n.

a. $\dfrac{z_{n+4}}{z_n} = \dfrac{\dfrac{1+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^{n+4}}}{\dfrac{1+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^{n}}} = \dfrac{1+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^{n+4}} \times \dfrac{(1-\mathrm{i})^{n}}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{1}{(1-\mathrm{i})^4}$

$(1-\mathrm{i})^4 = \left((1-\mathrm{i})^2\right)^2 = \left(1 - 2\,\mathrm{i} + \mathrm{i}^2\right)^2 = (-2\,\mathrm{i})^2 = 4\,\mathrm{i}^2 = -4$. Donc $\dfrac{z_{n+4}}{z_n} = -\dfrac{1}{4} \in \mathbf{R}$.

b. $\dfrac{z_{n+4}}{z_n} = -\dfrac{1}{4} \iff z_{n+4} = -\dfrac{1}{4} z_n$ qui entraîne $\overrightarrow{\mathrm{O}A_{n+4}} = -\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{O}A_n}$ et on en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{O}A_{n+4}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{O}A_n}$ sont colinéaires, ce qui signifie que les points O, A_n et A_{n+4} sont alignés.

2. On sait que pour deux nombres complexes z_1 et z_2 non nuls, $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)\ [2\pi]$.

$\arg(1+\text{i}) = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$ et $\arg(1-\text{i}) = -\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$ donc $\arg(1-\text{i})^n = -\dfrac{n\pi}{4}\ [2\pi]$

On a alors : $\arg\left(\dfrac{1+\text{i}}{(1-\text{i})^n}\right) = \arg(1+\text{i}) - \arg\left((1-\text{i})^n\right)\ [2\pi] = \left(\dfrac{\pi}{4}\right) - \left(-\dfrac{n\pi}{4}\right)\ [2\pi] = \dfrac{(n+1)\pi}{4}\ [2\pi]$

Le nombre z_n est réel si et seulement si son argument est égal à $k\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$:

$\dfrac{(n+1)\pi}{4} = k\pi \iff n+1 = 4k \iff n = 4k-1$ avec $k \in \mathbf{Z}$.

Le nombre z_n est réel si et seulement si $n = 4k-1$ avec $k \in \mathbf{Z}$.

Exercice 5 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 6$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+2} = \dfrac{5}{4}u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n$.

Partie A :

On souhaite calculer les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) à l'aide d'un tableur.
On a reproduit ci-dessous une partie d'une feuille de calcul, où figurent les valeurs de u_0 et de u_1.

1. La formule à saisir dans la cellule B4, puis à recopier vers le bas, permettant d'obtenir des valeurs de la suite (u_n) dans la colonne B est `= 5*B3/4 - B2/4`
2. On complète le tableau donné dans le texte avec des valeurs approchées à 10^{-3} près de u_n :

	A	B
1	n	u_n
2	0	3
3	1	6
4	2	6,75
5	3	6,938
6	4	6,984
7	5	6,996

3. On peut conjecturer que la suite (u_n) converge vers le nombre 7.

Partie B : Étude de la suite

On considère les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout n par : $v_n = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n$ et $w_n = u_n - 7$.

1. a. $v_{n+1} = u_{n+2} - \dfrac{1}{4}u_{n+1} = \dfrac{5}{4}u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n - \dfrac{1}{4}u_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n = v_n$ donc la suite (v_n) est constante.

b. La suite (v_n) est constante, donc pour tout n, $v_n = v_0 = u_1 - \dfrac{1}{4}u_0 = 6 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{21}{4}$.

Donc, pour tout n, $u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n = \dfrac{21}{4}$ donc $u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + \dfrac{21}{4}$.

2. a. Soit la propriété $u_n < u_{n+1} < 15$.

- **Initialisation**
  $u_0 = 3$ et $u_1 = 6$ donc $u_0 < u_1 < 15$; la propriété est vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité**
  On suppose que pour $n \geqslant 0$, $u_n < u_{n+1} < 15$; c'est l'hypothèse de récurrence.
  $u_n < u_{n+1} < 15 \implies \dfrac{1}{4}u_n < \dfrac{1}{4}u_{n+1} < \dfrac{15}{4} \implies \dfrac{1}{4}u_n + \dfrac{21}{4} < \dfrac{1}{4}u_{n+1} + \dfrac{21}{4} < \dfrac{15}{4} + \dfrac{21}{4}$ ce qui équivaut à $u_{n+1} < u_{n+2} < \dfrac{36}{4}$ c'est-à-dire $u_{n+1} < u_{n+2} < 9$.
  On en déduit que $u_{n+1} < u_{n+2} < 15$ donc que la propriété est vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion**
  On a vérifié que la propriété était vraie pour $n = 0$; on a démontré qu'elle était héréditaire pour $n \geqslant 0$. D'après le principe de récurrence, on peut dire que la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

On a donc démontré par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n < u_{n+1} < 15$.

Remarque des correcteurs

Le majorant de 15 proposé par le texte est très supérieur à la limite de la suite qui est 7. On aurait pu démontrer sans problème par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n < u_{n+1} < 7$.
On regarde ce que devient la partie « hérédité » du raisonnement par récurrence en prenant 7 à la place de 15 :

- **Hérédité**
On suppose que pour $n \geqslant 0$, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 7$; c'est l'hypothèse de récurrence.
$u_n < u_{n+1} \leqslant 7 \implies \dfrac{1}{4}u_n < \dfrac{1}{4}u_{n+1} \leqslant \dfrac{7}{4} \implies \dfrac{1}{4}u_n + \dfrac{21}{4} < \dfrac{1}{4}u_{n+1} + \dfrac{21}{4} \leqslant \dfrac{7}{4} + \dfrac{21}{4}$ ce qui équivaut à $u_{n+1} < u_{n+2} \leqslant \dfrac{28}{4}$.
On en déduit que $u_{n+1} < u_{n+2} \leqslant 7$ donc que la propriété est vraie au rang $n+1$.

Mais peut-être y avait-il eu, dans cette question, une volonté de dissocier le majorant de la limite ?

b. • On a démontré que pour tout n, $u_n < u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante.
• On a démontré que pour tout n, $u_n < 7$ donc la suite (u_n) est majorée.
La suite (u_n) est croissante et majorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

3. a. Pour tout n, $w_n = u_n - 7$ donc $u_n = w_n + 7$.

- $w_{n+1} = u_{n+1} - 7 = \dfrac{1}{4}u_n + \dfrac{21}{4} - 7 = \dfrac{1}{4}\left(w_n + 7\right) - \dfrac{7}{4} = \dfrac{1}{4}w_n + \dfrac{7}{4} - \dfrac{7}{4} = \dfrac{1}{4}w_n$
- $w_0 = u_0 - 7 = 3 - 7 = -4$

Donc la suite (w_n) est géométrique de premier terme $w_0 = -4$ et de raison $q = \dfrac{1}{4}$.

b. On en déduit que, pour tout n, $w_n = w_0 \times q^n = -4 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = -4 \times \dfrac{1}{4} \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} = -\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$.

Or $u_n = w_n + 7$ donc, pour tout n, $u_n = 7 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$.

c. $-1 < \dfrac{1}{4} < 1$ donc, d'après les propriétés des limites des suites géométriques, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$.
On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 7$.

Exercice 5 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans un territoire donné, on s'intéresse à l'évolution couplée de deux espèces : les buses (les prédateurs) et les campagnols (les proies).
Des scientifiques modélisent, pour tout entier naturel n, cette évolution par :

$$\left\{\begin{array}{rcr} b_0 & = & 1\,000 \\ c_0 & = & 1\,500 \\ b_{n+1} & = & 0{,}3b_n + 0{,}5c_n \\ c_{n+l} & = & -0{,}5b_n + 1{,}3c_n \end{array}\right.$$

où b_n représente approximativement le nombre de buses et c_n le nombre approximatif de campagnols le 1[er] juin de l'année $2000 + n$ (où n désigne un entier naturel).

1. On note A la matrice $\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 \\ -0{,}5 & 1{,}3 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n, U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

a. $\left\{\begin{array}{l c l}b_{n+1}&=&0,3b_n+0,5c_n\\c_{n+l}&=&-0,5b_n+1,3c_n\end{array}\right.$ donc $\left\{\begin{array}{l c l c l c l}b_1&=&0,3b_0+0,5c_0&=&0,3\times 1\,000+0,5\times 1\,500&=&1\,050\\c_1&=&-0,5b_0+1,3c_0&=&-0,5\times 1\,000+1,3\times 1\,500&=&1\,450\end{array}\right.$

Donc $U_1=\begin{pmatrix}1\,050\\1\,450\end{pmatrix}$.

$\left\{\begin{array}{l c l c l c l}b_2&=&0,3b_1+0,5c_1&=&0,3\times 1\,050+0,5\times 1\,450&=&1\,040\\c_2&=&-0,5b_1+1,3c_1&=&-0,5\times 1\,050+1,3\times 1\,450&=&1\,360\end{array}\right.$ donc $U_2=\begin{pmatrix}1\,040\\1\,360\end{pmatrix}$.

b. On sait que $\left\{\begin{array}{l c l}b_{n+1}&=&0,3b_n+0,5c_n\\c_{n+l}&=&-0,5b_n+1,3c_n\end{array}\right.$ ce qui s'écrit sous forme matricielle :

$\begin{pmatrix}b_{n+1}\\c_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,3&0,5\\-0,5&1,3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_n\\c_n\end{pmatrix}$ c'est-à-dire $U_{n+1}=AU_n$.

2. On donne les matrices $P=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$, $T=\begin{pmatrix}0,8&0,5\\0&0,8\end{pmatrix}$ et $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

On admet que P a pour inverse une matrice Q de la forme $\begin{pmatrix}1&0\\a&1\end{pmatrix}$ où a est un réel.

a. On doit déterminer le réel a pour que $PQ=QP=I$.

$PQ=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0\\a&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times 1+0\times a&1\times 0+0\times 1\\1\times 1+1\times a&1\times 0+1\times 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1+a&1\end{pmatrix}$

$PQ=I\iff 1+a=0\iff a=-1$; donc $Q=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$

On vérifie : $QP=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times 1+0\times 1&1\times 0+0\times 1\\-1\times 1+1\times 1&-1\times 0+1\times 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

Donc la matrice $Q=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$ est l'inverse de la matrice $P=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$.

b. On admet que $A=PTQ$.

Soit la propriété $A^n=PT^nQ$.

- **Initialisation**

  On a admis que $A=PTQ$ ce qui s'écrit $A^1=PT^1Q$; la propriété est donc vraie pour $n=1$.

- **Hérédité**

  On suppose la propriété vraie au rang $n\geqslant 1$n c'est-à-dire $A^n=PT^nQ$; c'est l'hypothèse de récurrence.

  $A^{n+1}=A\times A^n=\left(PTQ\right)\left(PT^nQ\right)=P\left(T(QP)T^n\right)Q$

  Les matrices P et Q sont inverses l'une de l'autre donc $QP=I$.

  $TPQ=TI=T$ et $T\times T^n=T^{n+1}$.

  On peut donc écrire $A^{n+1}=PT^{n+1}Q$ ce qui démontre que la propriété est vraie au rang $n+1$.

  Conclusion

  On a vérifié la propriété pour $n=1$. On a démontré que la propriété était héréditaire pour tout $n\geqslant 1$. D'après le principe de récurrence, on peut dire que la propriété est vraie pour tout $n\geqslant 1$.

On a donc démontré que, pour tout n non nul, $A^n=PT^nQ$.

c. Soit la propriété $T^n=\begin{pmatrix}0,8^n&0,5n\times 0,8^{n-1}\\0&0,8^n\end{pmatrix}$ où $T=\begin{pmatrix}0,8&0,5\\0&0,8\end{pmatrix}$.

- **Initialisation**

  Pour $n=1$, $\begin{pmatrix}0,8^1&0,5\times 1\times 0,8^{1-1}\\0&0,8^1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,8&0,5\\0&0,8\end{pmatrix}=T$

  Donc la propriété est vérifiée pour $n=1$.

- **Hérédité**

  On suppose la propriété vraie pour $n\geqslant 1$ c'est-à-dire $T^n=\begin{pmatrix}0,8^n&0,5n\times 0,8^{n-1}\\0&0,8^n\end{pmatrix}$; c'est l'hypothèse de récurrence.

$$\begin{aligned}T^{n+1} = T^n \times T &= \begin{pmatrix}0{,}8^n & 0{,}5n\times 0{,}8^{n-1}\\ 0 & 0{,}8^n\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}5\\ 0 & 0{,}8\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0{,}8^n\times 0{,}8+0{,}5n\times 0{,}8^{n-1}\times 0 & 0{,}8^n\times 0{,}5+0{,}5n\times 0{,}8^{n-1}\times 0{,}8\\ 0\times 0{,}8+0{,}8^n\times 0 & 0\times 0{,}5+0{,}8^n\times 0{,}8\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0{,}8^{n+1} & 0{,}8^n\times 0{,}5+0{,}5n\times 0{,}8^n\\ 0 & 0{,}8^{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}8^{n+1} & 0{,}5\,(n+1)\times 0{,}8^n\\ 0 & 0{,}8^{n+1}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

- **Conclusion**

  On a vérifié que la propriété était vraie au rang $n=1$. On a démontré qu'elle était héréditaire pour tout $n \geqslant 1$. D'après le principe de récurrence, on peut dire que la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

On a donc démontré que, pour tout $n \geqslant 1$, $T^n = \begin{pmatrix}0{,}8^n & 0{,}5n\times 0{,}8^{n-1}\\ 0 & 0{,}8^n\end{pmatrix}$.

3. Lucie exécute l'algorithme ci-dessous et obtient en sortie $N = 40$.

Initialisation :	N prend la valeur 0
	B prend la valeur 1 000
	C prend la valeur 1 500
Traitement :	Tant que $B > 2$ ou $C > 2$
	N prend la valeur $N+1$
	R prend la valeur B
	B prend la valeur $0{,}3R+0{,}5C$
	C prend la valeur $-0{,}5R+1{,}3C$
	Fin Tant Que
Sortie :	Afficher N

Pour $N = 40$ donc au bout de 40 ans, on a à la fois $B \leqslant 2$ et $C \leqslant 2$, donc le nombre de buses et de campagnols devient dangereusement réduit.

4. On admet que, pour tout entier naturel n non nul, on a $U_n = \begin{pmatrix}1\,000\times 0{,}8^n+\dfrac{625}{2}n\times 0{,}8^n\\ 1\,500\times 0{,}8^n+\dfrac{625}{2}n\times 0{,}8^n\end{pmatrix}$

et $n \leqslant 10\times 1{,}1^n$.

a. D'après la matrice U_n, on a $b_n = 1000\times 0{,}8^n + \dfrac{625}{2}n\times 0{,}8^n$ et $c_n = 1\,500\times 0{,}8^n + \dfrac{625}{2}n\times 0{,}8^n$, pour tout n.

De plus, b_n et c_n correspondent respectivement aux nombres de buses et de campagnols donc ce sont des nombres positifs : $0 \leqslant b_n$ et $0 \leqslant c_n$.

On sait que $n \leqslant 10\times 1{,}1^n$, donc $1000\times 0{,}8^n + \dfrac{625}{2}n\times 0{,}8^n \leqslant 1000\times 0{,}8^n + \dfrac{625}{2}\times 10\times 1{,}1^n\times 0{,}8^n$ donc on peut dire que $b_n \leqslant 1\,000\times 0{,}8^n + 3\,125\times 0{,}88^n$.

D'après les propriétés des limites des suites géométriques, comme $-1 < 0{,}8 < 1$, on sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(0{,}8)^n = 0$, et comme $-1 < 0{,}88 < 1$, on sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(0{,}88)^n = 0$.

On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1\,000\times 0{,}8^n + 3\,125\times 0{,}88^n\right) = 0$.

On sait que $0 \leqslant b_n \leqslant 1\,000\times 0{,}8^n + 3\,125\times 0{,}88^n$; d'après le théorème des gendarmes, on peut déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$.

Par un raisonnement similaire, on démontre que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} c_n = 0$.

b. Des mesures effectuées dans des territoires comparables montrent que la population de campagnols reste toujours supérieure à au moins 50 individus, ce qui veut dire que $c_n > 50$.

Avec le modèle étudié, le nombre de campagnols tend vers 0 donc deviendra plus petit que 50 à partir d'un certain rang.

À la lumière de ces informations, le modèle proposé dans l'exercice ne paraît donc pas cohérent.