Corrigé du baccalauréat S Polynésie 14 juin 2017

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

La société Fibration fournit des abonnements Internet et des abonnements de téléphone mobile.

Un client de la société Fibration souscrit soit un abonnement Internet, soit un abonnement de téléphone mobile, il ne cumule pas les deux.

En cas de difficulté, la société Fibration propose à ses clients une ligne d'assistance téléphonique : le client doit d'abord signaler s'il est client Internet ou s'il est client mobile puis son appel est mis en attente de réponse par un opérateur.

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Si nécessaire, les résultats seront arrondis à 10^{-3}.

Partie A - Durée d'attente

1. Dans cette question, on s'intéresse à la durée d'attente d'un client Internet lorsqu'il contacte l'assistance téléphonique avant de joindre un opérateur. Une étude permet de modéliser cette durée d'attente en minutes par la variable aléatoire D_1 qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,6.

a. Quelle est la durée d'attente moyenne que peut espérer un client Internet qui appelle cette ligne d'assistance ?

Solution : D_1 suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 0{,}6$ donc
$E(D_1) = \dfrac{1}{\lambda_1} = \dfrac{1}{0{,}6} = \dfrac{5}{3}$
Donc la durée moyenne d'attente espérée par un client internet est de 1 minute et 40 secondes

b. Calculer la probabilité que la durée d'attente d'un client Internet choisi au hasard soit inférieure à 5 minutes.

Solution : On cherche $p(D_1 < 5)$
$p(D_1 < 5) = \displaystyle\int_0^5 0{,}6\mathrm{e}^{-0{,}6t}\,dt = \left[-\mathrm{e}^{-0{,}6t}\right]_0^5 = 1 - \mathrm{e}^{-3} \approx 0{,}95$

2. Dans cette question, on s'intéresse à la durée d'attente d'un client mobile lorsqu'il contacte l'assistance téléphonique avant de joindre un opérateur. On modélise cette durée d'attente en minutes par la variable aléatoire D_2 qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, λ étant un réel strictement positif.

a. Sachant que $P(D_2 \leqslant 4) = 0{,}798$, déterminer la valeur de λ.

Solution : On a $p(D_2 \leqslant 4) = 0{,}798$
or $p(D_2 \leqslant 4) = \displaystyle\int_0^4 \lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\,dt = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^4 = 1 - \mathrm{e}^{-4\lambda}$
On a alors $1 - \mathrm{e}^{-4\lambda} = 0{,}798 \iff \mathrm{e}^{-4\lambda} = 0{,}202 \iff -4\lambda = \ln(0{,}202) \iff$
$\lambda = -\dfrac{\ln(0{,}202)}{4} \approx 0{,}4$

b. En prenant $\lambda = 0{,}4$, peut-on considérer que moins de 10 % des clients mobile choisis au hasard attendent plus de 5 minutes avant de joindre un opérateur ?

Solution :
$p(D_2 > 5) = 1 - p(D_2 \leqslant 5) = 1 - \displaystyle\int_0^5 0{,}4\mathrm{e}^{-0{,}4t}\,dt = 1 - \left[-\mathrm{e}^{-0{,}4t}\right]_0^5 = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-2}\right) =$
$\mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}135$
Donc on peut considérer qu'au moins 10% des clients mobile attendent plus de 5 minutes

Partie B - Obtention d'un opérateur

Si la durée d'attente avant l'obtention d'un opérateur dépasse 5 minutes, l'appel prend automatiquement fin. Sinon, l'appelant obtient un opérateur.
On choisit au hasard un client qui appelle la ligne d'assistance.
On admet que la probabilité que l'appel émane d'un client Internet est 0,7.
De plus, d'après la partie A, on prend les données suivantes :
Si l'appel provient d'un client Internet alors la probabilité d'obtenir un opérateur est égale à 0,95.
Si l'appel provient d'un client mobile alors la probabilité d'obtenir un opérateur est égale à 0,87.

1. Déterminer la probabilité que le client joigne un opérateur.

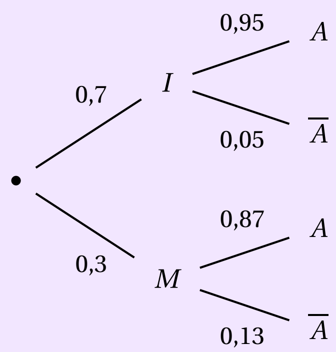
Solution : On nomme les évènements suivants :

— I : « Le client qui appelle est un client internet »

— M : « Le client qui appelle est un client mobile »

— A : « Le client obtient un opérateur »

avec ces notations, l'énoncé nous donne $p(I) = 0{,}7$, $p_I(A) = 0{,}95$ et $p_M(A) = 0{,}87$
On en déduit $p(M) = p\left(\overline{I}\right) = 1 - p(I) = 0{,}3$
On peut bâtir l'arbre suivant :



On cherche $p(A)$
M et I forment une partition de l'univers donc d'après le probabilités totales on a
$p(A) = p(A \cap I) + p(A \cap M) = p(I) \times p_I(A) + p(M) \times p_M(A) = 0{,}665 + 0{,}261 = 0{,}926$.
Donc la probabilité que le client obtienne un opérateur est d'environ 0,926.

2. Un client se plaint que son appel a pris fin après 5 minutes d'attente sans avoir obtenu d'opérateur.
Est-il plus probable que ce soit un client Internet ou un client mobile ?

Solution : On veut comparer $p_{\overline{A}}(I)$ et $p_{\overline{A}}(M)$

$$p_{\overline{A}}(I) = \frac{p\left(I \cap \overline{A}\right)}{p\left(\overline{A}\right)} = \frac{0{,}7 \times 0{,}05}{1 - p(A)} = \frac{0{,}035}{0{,}074} \approx 0{,}473$$

et $p_{\overline{A}}(M) = p_{\overline{A}}\left(\overline{I}\right) = 1 - p_{\overline{A}}(I) \approx 0{,}527$
Il est donc plus probable que le client soit un client mobile

Partie C - Enquête de satisfaction

La société annonce un taux de satisfaction de 85 % pour ses clients ayant appelé et obtenu un opérateur.
Une association de consommateurs souhaite vérifier ce taux et interroge 1 303 personnes. Parmi celles-ci, 1 150 se disent satisfaites.
Que pensez-vous du taux de satisfaction annoncé par la société ?

Solution : L'échantillon est de taille $n = 1303$, la proportion supposée de client satisfait dans la population est $p = 0{,}85$

On a $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$, on peut donc bâtir l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%

$$I = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

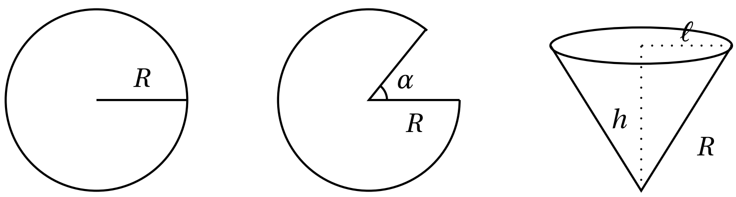
$$p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}831 \text{ et } p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}869$$

or la fréquence observée de personnes satisfaites sur l'échantillon est $f = \dfrac{1\,150}{1\,303} \approx 0{,}883$

$f \notin I$ on peut donc remettre en cause l'affirmation de la société au risque de 5% de se tromper.

Exercice 2 **5 points**

Commun à tous les candidats



Dans un disque en carton de rayon R , on découpe un secteur angulaire correspondant à un angle de mesure α radians. On superpose les bords afin de créer un cône de révolution. On souhaite choisir l'angle α pour obtenir un cône de volume maximal.

On appelle ℓ le rayon de la base circulaire de ce cône et h sa hauteur.
On rappelle que :

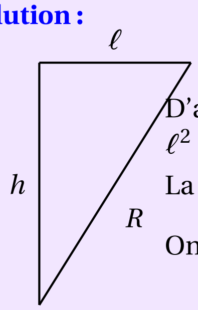
— le volume d'un cône de révolution de base un disque d'aire $\mathscr{A}$ et de hauteur h est $\dfrac{1}{3}\mathscr{A}h$.

— la longueur d'un arc de cercle de rayon r et d'angle θ, exprimé en radians, est $r\theta$.

1. On choisit $R = 20$ cm.

a. Montrer que le volume du cône, en fonction de sa hauteur h, est $V(h) = \dfrac{1}{3}\pi\left(400 - h^2\right)h$.

Solution :



D'après le théorème de Pythagore on a $\ell^2 + h^2 = R^2$ d'où
$\ell^2 = R^2 - h^2 = 400 - h^2$

La base du cône est de rayon ℓ donc son volume est $V = \dfrac{1}{3}\pi\ell^2 h$

On a donc bien $V(h) = \dfrac{1}{3}\pi\left(400 - h^2\right)h = \dfrac{\pi}{3}\left(400h - h^3\right)$

b. Justifier qu'il existe une valeur de h qui rend le volume du cône maximum. Donner cette valeur.

Solution : De manière évidente on a $0 < h < R$ donc ici $h \in]0\,;\,20[$

$V(h) = \dfrac{\pi}{3}\left(400h - h^3\right)$ est un polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $]0\,;\,20[$

$\forall h \in]0\,;\,20[\,,\ V'(h) = \dfrac{\pi}{3}\left(400 - 3h^2\right) = \dfrac{\pi}{3}\left(20 - h\sqrt{3}\right)\left(20 + h\sqrt{3}\right)$

$v'(h)$ est du signe de $\left(20 - h\sqrt{3}\right)$ sur $]0\,;\,20[$ car $\dfrac{\pi}{3}\left(20 + h\sqrt{3}\right) > 0$

Les variations de V sont donc données par le tableau suivant :

h	0		$\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$		20
$V'(h)$		$+$	0	-	
$V(h)$	0	$\nearrow$	M	$\searrow$	0

$V(h)$ admet donc un maximum en $h = \dfrac{20\sqrt{3}}{3}$

ce maximum est $M = V\left(\dfrac{20\sqrt{3}}{3}\right)$

$$= \frac{\pi}{3}\left(\frac{400 \times 20\sqrt{3}}{3} - \frac{20^3 \times \sqrt{3}^3}{3^3}\right)$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(\frac{8\,000\sqrt{3}}{3} - \frac{8\,000\sqrt{3}}{9}\right)$$

$$= \frac{16\,000\pi\sqrt{3}}{27} \approx 3\,224{,}5$$

c. Comment découper le disque en carton pour avoir un volume maximum ? Donner un arrondi de α au degré près.

Solution : Le volume est maximal si $h = \dfrac{20\sqrt{3}}{3}$ donc $h^2 = \dfrac{400}{3}$

on en déduit $\ell^2 = R^2 - h^2 = 400 - \dfrac{400}{3} = \dfrac{800}{3}$

$\ell = \sqrt{\dfrac{800}{3}} = \dfrac{20\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{20\sqrt{6}}{3}$

Or ℓ représente le rayon de la base du cône. Le périmètre de cette base est donc $2\pi\ell = \dfrac{40\pi\sqrt{6}}{3}$

ce périmètre correspond à la longueur d'arc de cercle restant après le découpage du disque initial.

On a donc $2\pi R - R\alpha = \dfrac{40\pi\sqrt{6}}{3}$ soit $\alpha = 2\pi - \dfrac{2\pi\sqrt{6}}{3} = 2\pi\left(\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}\right)$ radians soit $\alpha \approx 66°$

Donc il faut découper un secteur angulaire d'angle environ égal à 66° pour obtenir le cône de volume maximal

2. L'angle α dépend-il du rayon R du disque en carton ?

Solution : On reprend les calcul précédents avec R
on en déduit $\ell^2 = R^2 - h^2$, $V(h) = \dfrac{\pi}{3}\pi\ell^2 h = \dfrac{\pi}{3}\pi\left(R^2 - h^2\right)h = \dfrac{\pi}{3}\left(R^2 h - h^3\right)$
donc $V'(h) = \dfrac{\pi}{3}\pi\left(R^2 - 3h^2\right) = \dfrac{\pi}{3}\left(R - h\sqrt{3}\right)\left(R + h\sqrt{3}\right)$
Les variations de V sont donc données par le tableau suivant :

h	0		$\dfrac{R\sqrt{3}}{3}$		20
$V'(h)$		+	0	-	
$V(h)$	0	↗	M	↘	0

$V(h)$ admet donc un maximum en $h = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}$
on en déduit $\ell^2 = R^2 - h^2 = R^2 - \dfrac{R^2}{3} = \dfrac{2R^2}{3}$
$\ell = \sqrt{\dfrac{2R^2}{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}R$
Or ℓ représente le rayon de la base du cône. Le périmètre de cette base est donc
$2\pi\ell = \dfrac{2\pi R\sqrt{6}}{3}$
ce périmètre correspond à la longueur d'arc de cercle restant après le découpage du disque initial.
On a donc $2\pi R - R\alpha = \dfrac{2\pi R\sqrt{6}}{3}$ soit $\alpha = 2\pi - \dfrac{2\pi\sqrt{6}}{3} = 2\pi\left(\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}\right)$ radians soit $\alpha \approx 66°$
Donc la valeur de α ne dépend pas de R pour obtenir le volume maximal.

EXERCICE 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

Les interactions électriques conduisent à modéliser la molécule de méthane CH_4 de la façon suivante :

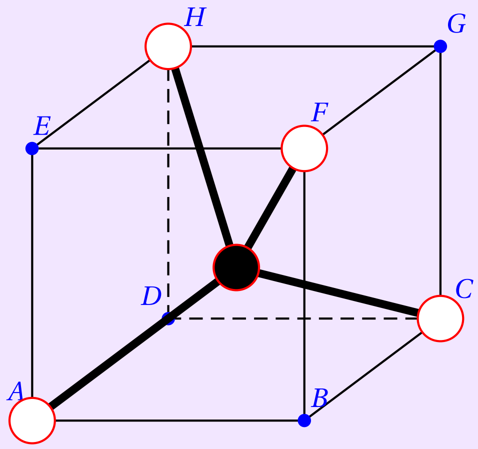
- Les noyaux d'atomes d'hydrogène occupent les positions des quatre sommets d'un tétraèdre régulier.
- Le noyau de carbone au centre de la molécule est à égale distance des quatre atomes d'hydrogène.

L'objectif est de déterminer une mesure de l'angle entre deux liaisons carbone–hydrogène.
Un tétraèdre régulier est un polyèdre dont les quatre faces sont des triangles équilatéraux.

1. Justifier qu'on peut inscrire ce tétraèdre dans un cube ABCDEFGH en positionnant deux atomes d'hydrogène sur les sommets A et C du cube et les deux autres atomes d'hydrogène sur deux autres sommets du cube.

Représenter la molécule dans le cube donné en annexe.

Solution :
[AC] est la diagonale d'une face carrée du cube tout comme [AH] , [AF] , [CF] , [CH] et [HF].
On en déduit que ACFH est un tétraèdre régulier car ses arêtes ont toutes même mesure donc ses faces sont des triangles équilatéraux
Pour représenter la molécule de CH_4 il suffit donc de placer les atomes d'hydrogène sur les sommets A, C, F et H
L'atome de carbone est à égale distance des atomes d'hydrogène donc il se situe au centre de la sphère circonscrite au cube, il suffit donc de placer l'atome de carbone au centre du cube c'est à dire au milieu de [AG]



Dans la suite de l'exercice, on pourra travailler dans le repère $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

2. Démontrer que l'atome de carbone est au centre Ω du cube.

Solution : L'atome de carbone est à égale distance des atomes d'hydrogène donc il se situe au centre Ω de la sphère circonscrite au cube c'est à dire au centre du cube

3. Déterminer l'arrondi au dixième de degré de la mesure de l'angle que forment entre elles les liaisons carbone-hydrogène, c'est-à-dire l'angle $\widehat{A\Omega C}$.

Solution : dans le repère $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ on a

$A(0;0;0)$, $C(1;1;0)$, $G(1;1;1)$ donc $\Omega\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$ puisque Ω est le milieu de [AG]

on a alors $\overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix}-0,5\\-0,5\\-0,5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\Omega C}\begin{pmatrix}0,5\\0,5\\-0,5\end{pmatrix}$ d'où $\Omega A = \Omega C = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{\Omega C} = -0,25 - 0,25 + 0,25 = -\frac{1}{4}$

or $\overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{\Omega C} = \Omega A \times \Omega C \times \cos\left(\widehat{A\Omega C}\right) = \frac{3}{4} \times \cos\left(\widehat{A\Omega C}\right)$

On en déduit que $\cos\left(\widehat{A\Omega C}\right) = -\frac{1}{3}$ et donc $\widehat{A\Omega C} \approx 109,5°$

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On s'intéresse à la chute d'une goutte d'eau qui se détache d'un nuage sans vitesse initiale. Un modèle très simplifié permet d'établir que la vitesse instantanée verticale, exprimée en m.s^{-1}, de chute de la goutte en fonction de la durée de chute t est donnée par la fonction v définie ainsi :

Pour tout réel positif ou nul t, $v(t) = 9{,}81\dfrac{m}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right)$; la constante m est la masse de la goutte en milligramme et la constante k est un coefficient strictement positif lié au frottement de l'air.

On rappelle que la vitesse instantanée est la dérivée de la position.
Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A - Cas général

1. Déterminer les variations de la vitesse de la goutte d'eau.

Solution : v est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et $\forall t > 0$, $v'(t) = 9{,}81\dfrac{m}{k} \times \dfrac{k}{m}\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} = 9{,}81\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} > 0$
On en déduit que la vitesse de la goutte est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$

2. La goutte ralentit-elle au cours de sa chute ?

Solution : Sa vitesse étant strictement croissante, la goutte ne ralentit pas.

3. Montrer que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} v(t) = 9{,}81\frac{m}{k}$. Cette limite s'appelle vitesse limite de la goutte.

Solution : On pose $T = -\dfrac{k}{m}t$ alors quand t tend vers $+\infty$, T tend vers $-\infty$
on a alors $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} = \lim_{T\to-\infty} \mathrm{e}^{T} = 0$
et donc par opération sur les limites on a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} v(t) = 9{,}81\frac{m}{k}$

4. Un scientifique affirme qu'au bout d'une durée de chute égale à $\dfrac{5m}{k}$, la vitesse de la goutte dépasse 99 % de sa vitesse limite. Cette affirmation est-elle correcte ?

Solution : $v\left(\dfrac{5m}{k}\right) = 9{,}81\dfrac{m}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-5}\right)$ or $\left(1 - \mathrm{e}^{-5}\right) \approx 0{,}993 > 0{,}99$
on a donc $v\left(\dfrac{5m}{k}\right)$ qui est supérieure à 99 % de la vitesse limite or la vitesse étant croissante, on en déduit que le scientifique a raison.

Partie B

Dans cette partie, on prend $m = 6$ et $k = 3{,}9$.
À un instant donné, la vitesse instantanée de cette goutte est 15 m.s^{-l}.

1. Depuis combien de temps la goutte s'est-elle détachée de son nuage ? Arrondir la réponse au dixième de seconde.

Solution : $\dfrac{m}{k} = \dfrac{6}{3{,}9} = \dfrac{20}{13}$

$v(t) = 9{,}81 \times \dfrac{20}{13}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{13}{20}t}\right)$

On cherche t tel que $v(t) = 15$

$$\begin{aligned}
v(t) = 15 &\iff 9{,}81\frac{20}{13}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{13}{20}t}\right) = 15\\
&\iff 1 - \mathrm{e}^{-\frac{13}{20}t} = \frac{195}{196{,}2}\\
&\iff \mathrm{e}^{-\frac{13}{20}t} = \frac{1{,}2}{196{,}2} = \frac{2}{327}\\
&\iff \mathrm{e}^{\frac{13}{20}t} = 163{,}5\\
&\iff \frac{13}{20}t = \ln(163{,}5)\\
&\iff t = \frac{20\ln(163{,}5)}{13} \approx 7{,}84
\end{aligned}$$

La goutte s'est donc détachée depuis environ 7,8 secondes quand sa vitesse atteint 15 m.s^{-l}.

2. En déduire la vitesse moyenne de cette goutte entre le moment où elle s'est détachée du nuage et l'instant où on a mesuré sa vitesse. Arrondir la réponse au dixième de m.s^{-1}.

Solution : On cherche la valeur moyenne de $v(t)$ sur l'intervalle $[0;\ 7{,}8]$

cette valeur moyenne est donnée par $\mu = \dfrac{1}{7{,}8}\displaystyle\int_0^{7{,}8} v(t)\,dt$

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{1}{7{,}8} \times 9{,}81 \times \frac{20}{13}\int_0^{7{,}8} 1 - e^{-\frac{13}{20}t}\,dt\\
&= \frac{327}{169}\left[t + \frac{20}{13}e^{-\frac{13}{20}t}\right]_0^{7{,}8}\\
&= \frac{327}{169}\left(7{,}8 + \frac{20}{13}e^{-5{,}07} - \frac{20}{13}\right) \approx 12{,}1
\end{aligned}$$

La vitesse moyenne de la goutte est donc d'environ 12,1 m.s^{-1} sur l'intervalle $[0\ ;\ 7{,}8]$

EXERCICE 4 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Une personne a mis au point le procédé de cryptage suivant :

— À chaque lettre de l'alphabet, on associe un entier n comme indiqué ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

— On choisit deux entiers a et b compris entre 0 et 25.

— Tout nombre entier n compris entre 0 et 25 est codé par le reste de la division euclidienne de $an + b$ par 26.

Le tableau suivant donne les fréquences f en pourcentage des lettres utilisées dans un texte écrit en français.

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Fréquence	9,42	1,02	2,64	3,38	15,87	0,94	1,04	0,77	8,41	0,89	0,00	5,33	3,23
Lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Fréquence	7,14	5,13	2,86	1,06	6,46	7,90	7,26	6,24	2,15	0,00	0,30	0,24	0,32

Partie A

Un texte écrit en français et suffisamment long a été codé selon ce procédé. L'analyse fréquentielle du texte codé a montré qu'il contient 15,9 % de O et 9,4 % de E.
On souhaite déterminer les nombres a et b qui ont permis le codage.

1. Quelles lettres ont été codées par les lettres O et E ?

Solution : Dans le tableau des fréquences, la fréquence la plus proche de 15,9% est 15,87% associée à la lettre E

De même la fréquence la plus proche de 9,4 % est 9,42 % associée à la lettre A

Finalement E a été codé par 0 et A a été codé par E.

2. Montrer que les entiers a et b sont solutions du système

$$\begin{cases} 4a+b \equiv 14\ [26] \\ b \equiv 4\ [26]. \end{cases}$$

Solution : l'entier associé à E est 4, celui associé à A est 0 et celui associé à O est 14

on a donc $4a+b \Longleftrightarrow 14[26]$ car E (associé à $n=4$) est codé par O associé à 14

de même $0a+b \Longleftrightarrow 4[26]$ car A (associé à $n=0$) est codé par E associé à 4.

Finalement on a bien $\begin{cases} 4a+b \equiv 14\ [26] \\ b \equiv 4\ [26]. \end{cases}$

3. Déterminer tous les couples d'entiers $(a\ , b)$ ayant pu permettre le codage de ce texte.

Solution : Le système précédent nous donne $b=4$ car $0 \leqslant b \leqslant 25$

on a donc $4a+b \equiv 14\ [26] \Longleftrightarrow 4a \equiv 10[26]$ alors il existe un entier naturel k tel que $4a = 26k+10$

$4a = 26k+10 \Longleftrightarrow 2a = 13k+5$. k est nécessairement impair

pour $k=1$ on obtient $a=9$ et pour $k=3$ on obtient $a=22$

pour toute autre valeur de k on trouve que a n'est pas compris entre 0 et 25

Finalement les couples d'entiers $(a\ , b)$ qui ont permis le codage sont d'entiers $(9\ , 4)$ et d'entiers $(22\ , 4)$

Partie B

1. On choisit $a=22$ et $b=4$.

a. Coder les lettres K et X.

Solution : K est associé à $n=10$ et $10a+b=224 \equiv 16[26]$

X est associé à $n=23$ et $23a+b=510 \equiv 16[26]$

donc K et X ont été codé par la même lettre Q

b. Ce codage est-il envisageable ?

Solution : Deux lettres différentes étant codées par la même lettre, le codage est inenvisageable.

2. On choisit $a = 9$ et $b = 4$.

a. Montrer que pour tous entiers naturels n et m, on a :

$$m \equiv 9n + 4\ [26] \iff n \equiv 3m + 14\ [26]$$

Solution :

$$\begin{aligned} m \equiv 9n+4\ [26] &\Longrightarrow 3m \equiv 27n + 12\ [26] \\ &\Longrightarrow 3m \equiv n+12+26n\ [26] \\ &\Longrightarrow 3m \equiv n + 12\ [26] \\ &\Longrightarrow n \equiv 3m - 12\ [26] \\ &\Longrightarrow n \equiv 3m + 14\ [26] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n \equiv 3m+14\ [26] &\Longrightarrow 9n \equiv 27m + 126\ [26] \\ &\Longrightarrow 9n \equiv m+22+26(m+4)\ [26] \\ &\Longrightarrow 9n \equiv m + 22\ [26] \\ &\Longrightarrow m \equiv 9n - 22\ [26] \\ &\Longrightarrow m \equiv 9n + 4\ [26] \end{aligned}$$

On a donc bien $m \equiv 9n + 4\ [26] \iff n \equiv 3m + 14\ [26]$

b. Décoder le mot AQ.

Solution :

A est associé à $m = 0$ il code la lettre associée à l'entier n tel que et $n \equiv 3m + 14\ [26]$ on a donc $n = 14$ associé à O

Q est associé à $m = 16$ il code la lettre associée à l'entier n tel que et $n \equiv 3m+14\ [26]$ on a donc $n = 10$ associé à K

le mot AQ est le codage de OK