Corrigé du baccalauréat S Polynésie juin 2003

EXERCICE 1 4 points

Partie A

1. $AB^2 = 8 + 16 = 24 = 24$;
   $AC^2 = 2 + 6 + 16 = 24 = 24$;
   $AD^2 = 2 + 6 + 16 = 24 = 24$;
   $BC^2 = 18 + 6 = 24 = 24$;
   $BD^2 = 18 + 6 = 24 = 24$;
   $CD^2 = 24$.
   On a donc AB = AC = AD = BC = BD = CD : le tétraèdre est régulier.
2. Dans le triangle ACD, le segment [RS] joint les milieux de deux côtés; on a donc $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$; de même dans le triangle BCD, on a $\overrightarrow{UT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$; on en déduit que :
   $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{UT} \iff$ (RSTU) est un parallélogramme.
3. On a $R\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\,-\frac{\sqrt{6}}{2}\,;\,1\right)$ et $T\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\,\frac{\sqrt{6}}{2}\,;\,-1\right)$, c'est-à-dire des coordonnées opposées : donc O est le milieu de [RT].
   Conclusion : le centre du parallélogramme RSTU est le point O.
   Dans le triangle ABC, on a $\overrightarrow{RU} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, soit en prenant les normes $RU = \frac{1}{2}AB$, mais l'égalité obtenue ci-dessus $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ donne en normes $RS = \frac{1}{2}CD$.
   Or on a vu que $AB = CD = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$. Conclusion RS = RU : le parallélogramme RSTU a deux côtés consécutifs de même longueur : c'est un **losange**.
   D'autre part $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 2\sqrt{2} \times 0 + 0 \times 2\sqrt{6} + (-4) \times 0 = 0$: les vecteurs sont orthogonaux donc les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires. Comme les droites (RS) et (RU) sont respectivement parallèles aux droites (AB) et (CD), elles sont perpendiculaires.
   Finalement le losange (RSTU) a deux côtés consécutifs perpendiculaires : c'est un **carré**.

Partie B

1. Sur chaque tétraèdre il y a deux faces rouges : si le tétraèdre tombe sur une face rouge (cachée) il en restera une visible. Comme on lance trois tétraèdres la probabilité pour qu'au moins trois faces rouges soient visibles sur les trois tétraèdres est égale à 1.
2. Il y a une face bleue sur quatre faces. La probabilité que l'on ne voit pas de bleu en lançant un tétraèdre est égale à $\frac{1}{4}$. Les lancers des trois tétraèdres sont indépendants, donc la probabilité de ne pas voir de bleu en lançant trois tétraèdres est égale à $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$.
3. Il y a une chance sur deux que le tétraèdre tombe sur la face bleue ou sur la face jaune, donc la probabilité de l'évènement E est égale à $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.
4. La variable aléatoire comptant le nombre de réalisations de l'évènement E suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{8}$.
   La probabilité que l'évènement E ne soit jamais réalisé est égale à
   $\binom{n}{0}\left(\frac{1}{8}\right)^0 \times \left(\frac{7}{8}\right)^n = \frac{7^n}{8^n}$.

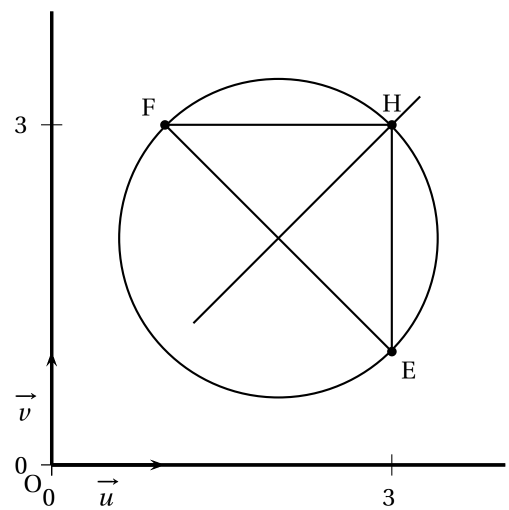
Donc la probabilité p_n pour que l'évènement E soit réalisé au moins une fois est égale à $1-\dfrac{7^n}{8^n}$. Comme $-1<\dfrac{7}{8}<1$, on sait que $-1<\dfrac{7^n}{8^n}<1$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{7^n}{8^n}=0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}p_n=1$.

EXERCICE 2 (Obligatoire) 5 points

1. **a.** On a E(3 ; 1) et F(1 ; 3)

   b. Puisque EHF est rectangle isocèle H appartient à la médiatrice de [EF] et au cercle de diamètre [EF]. On choisit entre les deux points communs à la droite et au cercle celui pour lequel EHF est un triangle rectangle isocèle direct.

   c. EFH est isocèle en H, donc HE = HF $\Rightarrow \dfrac{\text{HE}}{\text{HF}}=1 \iff \dfrac{|Z_\text{E}-Z_\text{H}|}{|Z_\text{F}-Z_\text{H}|}=1 \iff$
   $\dfrac{|3+\text{i}-Z_\text{H}|}{|1+3\text{i}-Z_\text{H}|}=1 \iff \left|\dfrac{3+\text{i}-Z_\text{H}}{1+3\text{i}-Z_\text{H}}\right|=1$.
   On sait d'autre part que :
   $\left(\overrightarrow{\text{HF}}, \overrightarrow{\text{HE}}\right)=\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$ ce qui se traduit en terme d'argument par :
   $\arg\left(\dfrac{Z_\text{E}-Z_\text{H}}{Z_\text{F}-Z_\text{H}}\right)=\dfrac{\pi}{2}\quad[2\pi] \iff \arg\left(\dfrac{3+\text{i}-Z_\text{H}}{1+3\text{i}-Z_\text{H}}\right)=\dfrac{\pi}{2}\quad[2\pi]$.
   Les deux résultats précédents traduisent l'égalité :
   $\dfrac{3+\text{i}-Z_\text{H}}{1+3\text{i}-Z_\text{H}}=\text{i} \iff 3+\text{i}-Z_\text{H}=\text{i}(1+3\text{i}-Z_\text{H}) \iff Z_\text{H}(-1+\text{i})=-6 \iff$
   $Z_\text{H}=\dfrac{6}{1-\text{i}}=\dfrac{6(1+\text{i})}{2}=3+3\text{i}$.
   Le point H a pour coordonnées (3 ; 3).

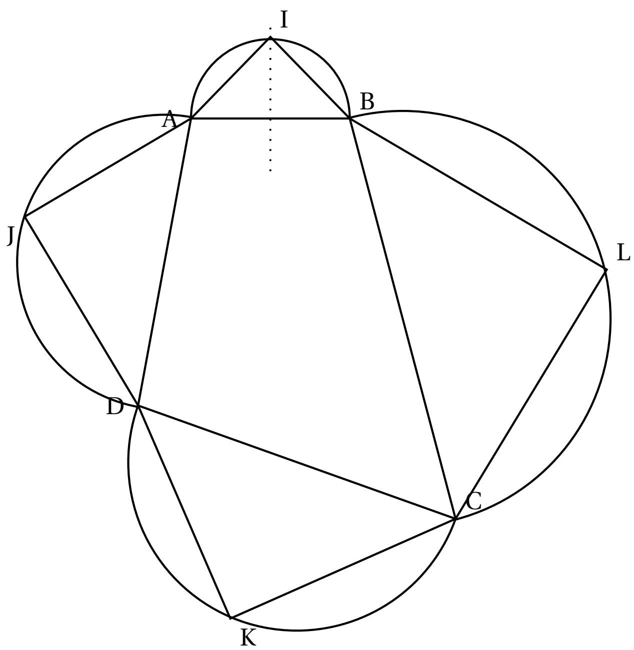


2. A, B, C et D sont quatre points du plan $\mathscr{P}$.

   a. On construit ces points de la même façon que le point H. Voir ci-dessous.

   b. Les droites (IK) et (LJ) semblent être perpendiculaires et il semble que IK = LJ.

3. **a.** De la même façon qu'à la question 1. l'égalité $\dfrac{\text{IA}}{\text{IB}}=1$ se traduit par
   $\left|\dfrac{b-Z_I}{a-Z_I}\right|=1$.



L'angle droit en I se traduit par $\left(\overrightarrow{\text{IA}}\,,\,\overrightarrow{\text{IB}}\right) = \frac{\pi}{2} = \arg\left(\dfrac{b - Z_I}{a - Z_I}\right) \quad [2\pi]$.

Ces deux informations se traduisent tout simplement par l'égalité :

$$\frac{b - Z_I}{a - Z_I} = \text{i}$$

L'égalité précédente est équivalente à :

$b - Z_I = \text{i}\,(a - Z_I) \iff b - a\text{i} = Z_1\,(1 - \text{i}) \iff Z_I = \dfrac{b - a\text{i}}{1 - \text{i}}$.

b. En remplaçant dans la démonstration précédente les points B et A par les points C et B, on obtient $Z_{\text{L}} = \dfrac{c - b\text{i}}{1 - \text{i}}$

c. De même on obtient : $Z_{\text{K}} = \dfrac{d - c\text{i}}{1 - \text{i}}$ et $Z_{\text{J}} = \dfrac{a - d\text{i}}{1 - \text{i}}$.

d. Calcul de $z_{\text{L}} - z_{\text{J}} = \dfrac{c - b\text{i}}{1 - \text{i}} - \dfrac{a - d\text{i}}{1 - \text{i}} = \dfrac{c - a + (d - b)\text{i}}{1 - \text{i}}$.

Calcul de $z_{\text{K}} - z_{\text{I}} = \dfrac{d - c\text{i}}{1 - \text{i}} - \dfrac{b - a\text{i}}{1 - \text{i}} = \dfrac{d - b + (a - c)\text{i}}{1 - \text{i}}$.

En multipliant cette dernière égalité par i, on obtient bien :

$\text{i}\,(z_{\text{K}} - z_{\text{I}}) = \dfrac{(d - b)\text{i} - (a - c)}{1 - \text{i}} = \dfrac{c - a + (d - b)\text{i}}{1 - \text{i}} = z_{\text{L}} - z_{\text{J}}$.

Cette dernière égalité donne en modules :

$\left|z_{\text{L}} - z_{\text{J}}\right| = |\text{i}\,(z_{\text{K}} - z_{\text{I}})| = 1 \iff \left|z_{\text{L}} - z_{\text{J}}\right| = |(z_{\text{K}} - z_{\text{I}}| \iff \text{JL} = \text{IK}$.

En arguments sachant que l'argument de i est $\frac{\pi}{2}$:

$\dfrac{z_{\text{L}} - z_{\text{J}}}{z_{\text{K}} - z_{\text{I}}} = \text{i} \Rightarrow \left(\overrightarrow{\text{IK}}\,,\,\overrightarrow{\text{JL}}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$, donc on a bien (IK) $\perp$ (JL).

PROBLÈME 11 points

Partie A

1. On sait que pour tout réel x,

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$$

En multipliant chaque membre par le nombre supérieur à zéro e^x, on obtient :

$$-\text{e}^x \leqslant f(x) \leqslant \text{e}^x.$$

On sait que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \text{e}^x = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \text{e}^x \cos x = 0$ puisque $f(x)$ est encadré par deux nombres qui ont pour limite 0.

L'axe des abscisses est donc asymptote horizontale au voisinage de moins l'infini à $\mathscr{C}_f$.

2. On résout $f(x) = 0 \iff \text{e}^x \cos x = 0 \iff \cos x = 0$ puisque $\text{e}^x \neq 0$.

Les solutions sont donc les nombres $\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

3. Pour tout réel $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ +\dfrac{\pi}{2}\right]$ on a :

$\cos x - \sin x = \sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x) = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right) =$

$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x - \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right) = \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) = \sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right).$

4. Sur l'intervalle considéré, f produit de fonctions dérivables est dérivable et sur cet intervalle :

$f'(x) = \text{e}^x \cos x + \text{e}^x \times (-\sin x) = \text{e}^x \cos x - \text{e}^x \sin x = \text{e}^x(\cos x - \sin x).$

D'après la question précédente $f'(x)$ peut s'écrire :

$f'(x) = \text{e}^x \times \sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right).$

Comme $\sqrt{2} >$ et e^x quel que soit x, le signe de la dérivée est donc celui de $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Or $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow -\dfrac{\pi}{+}\dfrac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4}$

soit $-\dfrac{\pi}{4} \leqslant x + \dfrac{\pi}{4} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

La fonction cos est positive sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, donc a fortiori sur $\left[-\dfrac{\pi}{4}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Finalement $f'(x) > 0$: la fonction f est strictement croissante sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{4}\right[$.

On montre de même que sur $\left]\dfrac{\pi}{4}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, $f'(x) < 0$: sur cet intervalle la fonction f est strictement décroissante.

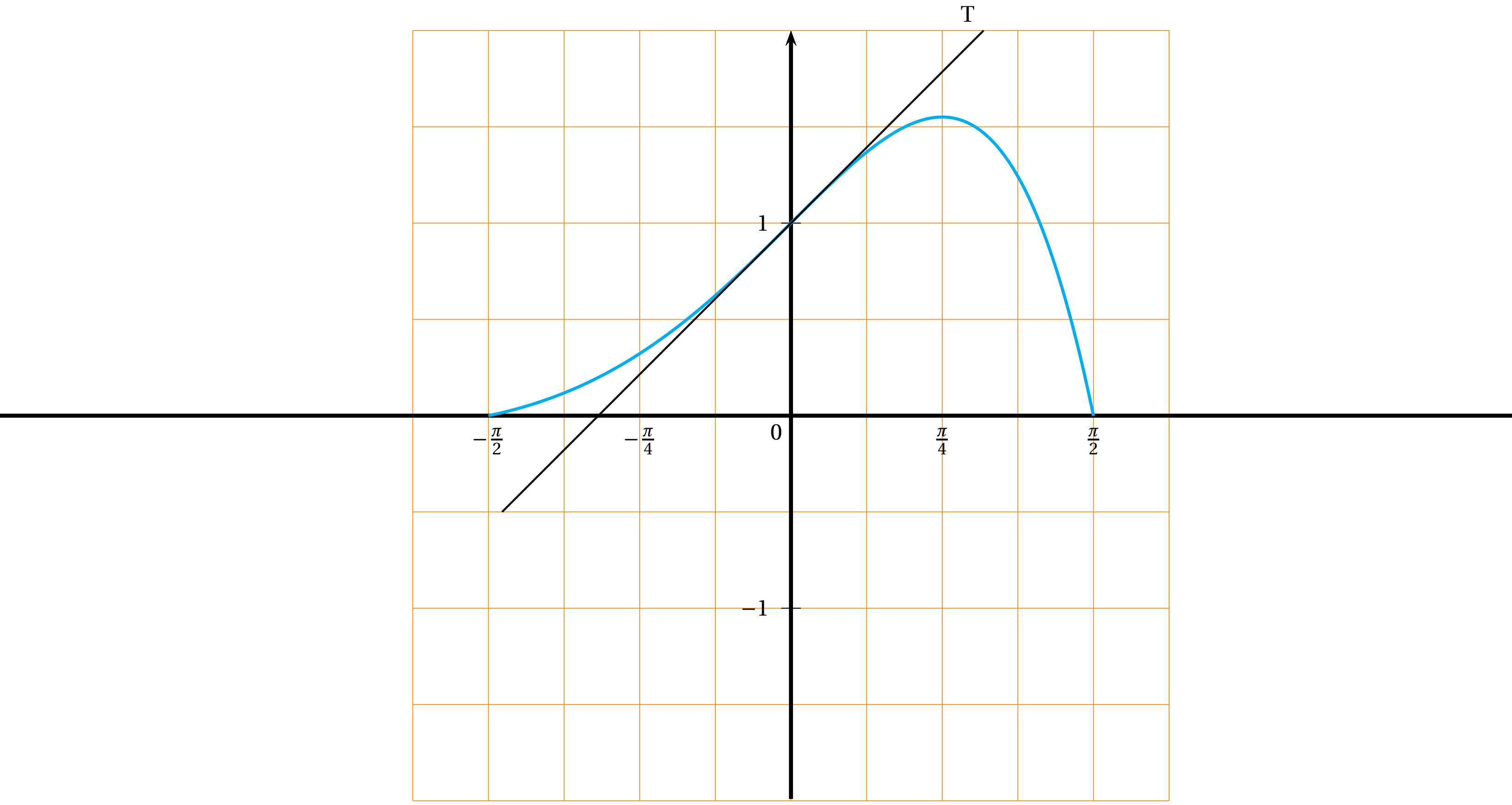
On a $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \text{e}^{-\frac{\pi}{2}}\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \text{e}^{-\frac{\pi}{4}}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\text{e}^{\frac{\pi}{4}} \approx 1,55.$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{e}^{\frac{\pi}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

5. Tracer $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ +\dfrac{\pi}{2}\right]$ sur le graphique ci-dessous

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\text{e}^{\frac{\pi}{4}}$	$\searrow$	0



6. On a $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}\right) \approx 1{,}55$ et $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$; sur l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{4}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ la fonction f continue prend une seule fois toutes les valeurs entre $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$ et 0 ; en particulier il existe un seul réel α de l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{4}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $f(\alpha) = \dfrac{1}{2}$.
La calculatrice donne $\alpha \approx 1{,}453 \approx 1{,}45$.

7. f' produit de fonctions dérivables est dérivable et sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ +\dfrac{\pi}{2}\right]$,
$f''(x) = \mathrm{e}^x(\cos x - \sin x) + \mathrm{e}^x(-\sin x - \cos x) = -2\mathrm{e}^x \sin x$.
Sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\ ,\ 2\right]$, la fonction sin est négative, donc $f''(x) > 0$: la fonction f' est croissante sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\ ,\ 2\right]$.
Sur $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, la fonction sin est positive, donc $f''(x) < 0$: la fonction f' est décroissante sur $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.
Conclusion : sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ la fonction f' admet un maximum en 0, $f'(0) = 1$.
Autrement dit : le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x atteint, pour $x = 0$, une valeur maximale 1.
Une équation de T est :
$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \iff y - 1 = 1x \iff y = x + 1$. (voir figure)

Partie B

1. Quel que soit le naturel n,
$\cos(n\pi) + \mathrm{i}\sin(n\pi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\right)^n = (-1)^n$.

En égalant parties réelles et parties imaginaires de ces deux nombres, on obtient :

$$\cos(n\pi) = (-1)^n \quad \text{et} \quad \sin(n\pi) = 0.$$

2. Quel que soit le naturel n, on pose :
$\begin{cases} u(x) = \cos nx & u'(x) = -n\sin nx \\ v'(x) = \mathrm{e}^x & v(x) = \mathrm{e}^x \end{cases}$
Les fonctions u, v, u', v' étant continues car dérivables, on peut intégrer par parties :
$I_n = [\mathrm{e}^x \cos nx]_0^\pi - \int_0^\pi -n\sin(nx)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (-1)^n\mathrm{e}^\pi + n\int_0^\pi \sin(nx)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$
On calcule cette dernière intégrale J_n par parties :
$\begin{cases} u(x) = \sin nx & u'(x) = n\cos nx \\ v'(x) = \mathrm{e}^x & v(x) = \mathrm{e}^x \end{cases}$
Donc $J_n = [\mathrm{e}^x \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi n\mathrm{e}^x \cos nx\,\mathrm{d}x = 0 - nI_n$.
Finalement : $I_n = (-1)^n\mathrm{e}^\pi - 1 - n^2 I_n \iff \left(n^2+1\right) I_n = (-1)^n\mathrm{e}^\pi - 1 \iff$

$$I_n = \frac{(-1)^n\mathrm{e}^\pi - 1}{n^2+1}.$$

3. Pour tout naturel n,on a :
$|I_n| = \left|\frac{(-1)^n\mathrm{e}^\pi - 1}{n^2+1}\right| = \frac{|(-1)^n\mathrm{e}^\pi - 1|}{\left|n^2+1\right|}.$
D'une part $\left|n^2+1\right| = n^2+1$, car $n^2+1 > 1 > 0$, et d'autre part
$|(-1)^n\mathrm{e}^\pi - 1| \leqslant |(-1)^n\mathrm{e}^\pi| + |(-1)|$, car pour tous réels x, y, $|x+y| \leqslant |x|+|y|$.
Donc $|(-1)^n\mathrm{e}^\pi - 1| \leqslant \mathrm{e}^\pi + 1$.
Finalement $|I_n| \leqslant \frac{\mathrm{e}^\pi+1}{n^2+1}$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$, on en déduit par encadrement puisque $|I_n| \geqslant 0$, que

$$\lim_{n\to+\infty} |I_n| = 0$$

Il en de même pour la suite (I_N) qui a pour limite zéro.

Partie C

1. Soit une fonction affine solution de (E) : $y = ax+b$, alors $y' = a$; cette fonction est solution de (E) si et seulement si :
$a-2ax-2b-1 = 0$, quel que soit le réel x ; on en déduit $a = 0$, donc la fonction n'est pas un polynôme du premier degré. L'assertion est **fausse**.

2. Si g est solution de (E) alors $g'-2g-1 = 0 \iff g' = 2g+1 \geqslant 1 > 0$: sa dérivée est bien positive pour tout réel x : l'assertion est **vraie**.

3. Si $h(x) = 3\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{2}$, alors $h'(x) = 6\mathrm{e}^{2x}$.
h est solution de (E) si et seulement pour tout réel $h'-2h-1 = 0 \iff 6\mathrm{e}^{2x} - 6\mathrm{e}^{2x} - 1 - 1 = 0 \iff -2 = 0$: l'assertion est **fausse**.

4. Soit F la primitive de f telle que $F(0) = 0$. On sait que $F'(x) = f(x)$.
F est solution de (E$'$) si et seulement si :
$F'(x) - 2F(x) = 1 - \mathrm{e}^x \sin x \iff f(x) - 2F(x) = 1 - \mathrm{e}^x \sin x \iff$
$F(x) = \frac{f(x) + \mathrm{e}^x \sin x - 1}{2} \iff F(x) = \frac{\mathrm{e}^x(\cos x + \sin x) - 1}{2}.$

Vérifions si F est bien une primitive de f qui s'annule en 0 :
$F'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x(\cos x + \sin x) + \mathrm{e}^x(-\sin x + \cos x)}{2} = \dfrac{2\mathrm{e}^x \cos x}{2} = \mathrm{e}^x \cos x = f(x)$.
D'autre part : $F(0) = \dfrac{1-1}{2} = 0$.
L'assertion est **vraie**.